1 SÍNTESIS DE PROBABILIDAD

Son varios los vocablos que se reconocen como antecedentes del término *estadística*. Se pueden nombrar los siguientes:

- *Statistik,* que proviene de la palabra Italiana *statista*, que significa *estadista.*
- *Status,* (latín), que significa posición, situación o estado.
- *Staat* (alemán), que se refiere al estado como unidad política superior.
- *Statera* (griego), que significa balanza.

La razón que motivó al hombre a registrar datos con propósitos estadísticos, tal vez se encuentre en su necesidad, casi instintiva, de anotar aquellos hechos que aparecen como vivencias sociales transcendentes: crecimiento de poblaciones, disposiciones del alimento, fenómenos naturales, etc. Con el desarrollo de las civilizaciones, la estadística puede pensarse como una aritmética estatal para asistir a los gobernantes que necesitaban conocer la riqueza de sus súbditos para así recaudar impuestos o presupuestar la guerra.

1.1 DEFINICIONES

Dato

Número o medida que se obtiene de observaciones de una variable.

Variable

Es toda cualidad o característica que toma valores diferentes en distintos objetos.

Variable aleatoria

Es aquella variable que toma valores de algún proceso al azar.

Variable aleatoria continua

Es la variable aleatoria que puede tomar cualquier valor de un intervalo o dominio.

Variable aleatoria discreta

Es la variable que sólo puede tomar valores de un conjunto numerable.

Estadística

Ciencia cuyos propósitos son la extracción de datos y su uso en la realización de inferencias acerca de una población, de la cual dichos datos fueron extraídos.

Estadística descriptiva

Es la que trata con la descripción numérica o gráfica de un conjunto de datos.

Estadística inferencial Es la que trata con la formulación de conclusiones, estimaciones o generalizaciones acerca de parámetros poblacionales, con base en la estadística descriptiva realizada con datos muestrales.

Población

Es un grupo de datos que se toma como referencia en un estudio estadístico, y que considera todas las características de la variable definida en el problema bajo estudio.

Muestra

Es cualquier subconjunto de datos seleccionados de una población.

Diseño del experimento

Estudio de los métodos de muestreo y los problemas que con él se relacionan.

Espacio de eventos

Colección de todos los resultados posibles de un experimento.

Experimento aleatorio

Experimento que reúne las siguientes características: una acción, un resultado y una observación.

Evento simple

Es cada uno de los eventos que constituyen un espacio de eventos.

Estadística descriptiva

La estadística descriptiva hace uso de varias medidas para describir numéricamente un conjunto de datos muéstrales o poblacionales. Tales medidas se pueden clasificar como sigue:

- *Medidas de posición.* Este tipo de medidas indican la distribución que guardan los datos a lo largo de su *rango* (el dato mayor menos el menor). Se sub clasifican en:
- *Medidas de tendencia central.* Son medidas que normalmente se localizan alrededor del centro de los datos. Dentro de este tipo de medidas se encuentran la media aritmética, la mediana, el modo, la media armónica, la media geométrica y la media cuadrática.
- *Cuantiles.* Estas medidas indican la localización de los datos de acuerdo con una subdivisión que se realiza del rango de los mismos. Existen tres tipos de cuantiles: cuartiles, deciles, y percentiles.
- *Medidas de dispersión*. Son medidas que indican el grado en el cual están dispersos los datos con respecto a alguna medida de tendencia central. Este tipo de medidas lo conforman la variancia, la desviación estándar, la desviación media absoluta y el coeficiente de variación.
- *Medidas de deformación. Este tipo de medidas son relativas a la forma que tienen las curvas de frecuencias y también están relacionadas con la dispersión que tienen los datos. Existe dos tipos de medidas de deformación: el coeficiente de sesgo* o *asimetría y el coeficiente de kurtosis o de apuntamiento.*

Rango: Se define como la diferencia entre el mayor y el menor valor de una distribución.

Criterio de Sturges para establecer el número de intervalos a utilizar en una distribución:

$$\boxed{k = 1 + 3.3 \log}$$ k, número de intervalos

1.2 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Momentos con respecto al origen:

$$\boxed{m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k}$$ Datos no ordenados

$$\boxed{m'_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} t_j^k f_j}$$ atos ordenados

donde n=número de datos, m=número de intervalos, t=intervalo de clase, f=frecuencia de clase, k=orden del momento.

Media. Se define como el momento de primer orden con respecto al origen:

$$\boxed{m'_1 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$ atos no ordenados

$$\boxed{m'_1 = \bar{x}\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} t_j f_j}$$ atos ordenados

donde n=número de datos; m=número de intervalos; t=intervalo de clase; f=frecuencia de clase

Modo:

$$\boxed{\tilde{x} = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} c}$$

Mediana:

$$\boxed{\hat{x} = L_1 + \frac{n/2 - (\sum f)_1}{f} c}$$

1.3 MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Momentos con respecto a la media:

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k$$ atos no ordenados

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(t_j - \overline{x})^k f_j$$ tos ordenados

Variancia. Se define como el momento de orden dos con respecto a la media:

$$m_2 = S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$ Datos no ordenados

$$m_2 = S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(t_j - \overline{x})^2 f_j$$ os ordenados

Desviación estándar:

$$S_x = \sqrt{m_2}$$

Coeficiente de variación:

$$CV_x = \frac{S_x}{\overline{x}}$$

1.4 MEDIDAS DE ASIMETRÍA

$$\mathit{Asimetría} = [(q_3 - q_2) - (q_2 - q_1)] \,/\, S_x$$

donde q_1, q_2 y q_3 son los cuartiles del 25 %, 50 %, que corresponde a la mediana y del 75 %, S_x es la desviación estándar. También se puede calcular una medida de asimetría con el momento de orden tres con respecto a la media, con la variancia y finalmente con el parámetro b_1:

$$\boxed{m_3 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}(t_j - \bar{x})^3 f_j}$$

$$\boxed{b_1 = m_3^2 / m_2^3}$$

1.5 MEDIDAS DE APLANAMIENTO O EXCESO (KURTOSIS)

$$\boxed{b_2 = {m_4}/{m_2^2}}$$

$$\boxed{\gamma_2 = b_2 - 3}$$

si $\gamma_2 = 0$, es mesokúrtica

$\gamma_2 > 0$, es leptokúrtica

$\gamma_2 < 0$, es platokúrtica

1.6 PROBABILIDAD

La teoría axiomática de probabilidades se basa en tres axiomas:

1. La probabilidad de ocurrencia de un evento A es un número, P(A), que se le asigna a dicho evento, cuyo valor es menor o igual que uno, o sea

$0 \leq P(A) \leq 1$

2. Si *E* es el espacio de eventos asociados a un experimento, entonces

$P(E) = 1$

3. La probabilidad, P(C), de la unión, C, de dos eventos mutuamente exclusivos, A y B, es igual a la suma de las probabilidades de estos, es decir

$P(A \cup B) = P(C) = P(A) + P(B)$

Probabilidad condicional

Un concepto de gran importancia práctica es el de probabilidad condicional, P(A|B), del evento A, dado que el B ha ocurrido. Si P(B) es diferente de *cero,* esta expresa:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

1.7 TEOREMA DE BAYES

Se dice que un grupo de eventos es colectivamente exhaustivo si la unión de todos ellos es el espacio de eventos correspondientes como se muestra en la figura 1.1:

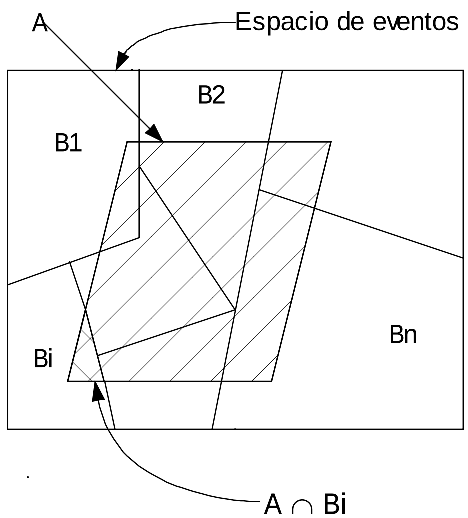


Figura I.1 Eventos colectivamente exhaustivos

Con lo cual se define el llamado *teorema de la probabilidad total*.

Considerando que

$$P(Bj \cap A) = P(A \cap Bj)$$

$$P(Bj \mid A) = \frac{P(Bj \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap Bj)}{P(A)}$$

$$P(Bj \mid A) = \frac{P(Bj)P(A \mid Bj)}{\sum_{i=1}^{i=n} P(Bi)P(A \mid Bj)}$$

Este resultado se conoce como ***teorema de Bayes***. A las probabilidades P(Bj) que se asignan a los eventos Bj antes de observar el evento A, se les denomina *a priori*; a las probabilidades P(Bj | A) que se obtiene después de observar el evento A, se les llama *a posteriori*

1.8 VARIABLE ALEATORIA

Una variable aleatoria es una función que asocia un número con cada punto en un espacio muestral del experimento.

Para un espacio muestral *E* de algún experimento, una *variable aleatoria* es cualquier regla que asocia un número con cada resultado de *E*. Existen dos tipo de variables aleatorias, *discretas* y *continuas;* una variable *discreta* es aquella cuyos valores posibles forman un conjunto finito o bien se pueden listar en una sucesión infinita donde hay un primer elemento, un segundo elemento, etc. Una variable aleatoria es *continua* si su conjunto de valores posibles abarca todo un intervalo.

1.9 DISTRIBUCIONES TEÓRICAS DE PROBABILIDAD

Distribución normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad < \infty$$

donde: x = variable aleatoria

e, π = constantes

μ = media

σ= desviación estándar

σ^2 = variancia

Distribución normal estándar

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad \infty < z < \infty$$

Distribución binomial

$$\boxed{f(x) = \binom{n}{x} p^x (q)^{n-x}}$$ x = 0, 1, 2,…, n,

Donde q = 1 - p

p: probabilidad de éxito.

q: probabilidad de fracaso.

Distribución de Poisson

$$\boxed{f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}}$$ x = 0,1,2,…..

donde: x= variable aleatoria

e = cte.

λ = media

2 MODELOS DE DECISIÓN

La teoría de la decisión se ocupa de analizar cómo elige una persona aquella acción que, dentro de un conjunto de acciones posibles, le conduce al mejor resultado dadas sus preferencias. Si se debe invertir o no en bienes de equipo, qué carrera se piensa estudiar, qué coche comprarse, o incluso, con quién casarse; son problemas muy comunes que nos afectan en la vida cotidiana y a los que en términos formales se enfrenta la teoría de la decisión.

Se mencionan algunos de los principales exponentes que intervinieron en el desarrollo de los modelos de decisión implantando diversos criterios que hoy son útiles en el proceso de la toma de decisiones, entre los que destaca el astrónomo, físico y matemático francés ***Pierre Simon Laplace*** (1749-1827) una de sus aportaciones más conocidas es la famosa *Transformada de Laplace* y la *ecuación de Laplace*; dentro del campo de la Probabilidad también tuvo aportaciones en la *Teoría de la Probabilidad,* ya que en junto con el matemático británico ***Thomas Bayes,*** crearon el criterio *Bayes-Laplace* usado en los problemas de análisis de decisión y establece que si no se dispone absolutamente de ninguna información sobre las probabilidades asociadas con los futuros resultados entonces se deben asignar probabilidades iguales a cada uno de los posibles resultados y usar estas probabilidades para calcular el valor esperado de cada uno de los posibles cursos de acción.

Leonid Hurwicz (1917-2008), economista ruso, Premio Nobel de Economía 2007, se le atribuye en ser uno de los primeros economistas en reconocer el valor de la *Teoría de Juegos*. *William J. Baumol* (1922-), economista estadounidense que ha realizado valiosas contribuciones a la historia del pensamiento económico. También ha realizado aportes a la teoría de la organización industrial y la regulación, siendo uno de los creadores de la teoría de los mercados contestables o desafiables. En su criterio, usado en análisis de decisión, también conocido como *Criterio Maximax de* ***Baumol,*** que establece que para cada curso de acción defínase cuál es el mejor resultado (máximas ganancias o pérdidas mínimas) y selecciónese de entre los anteriores el máximo de los máximos.

Abraham Wald (1902-1950), matemático austríaco, nacionalizado estadounidense. Exiliado a EE UU en 1938, se especializó en estadística y aportó a esta ciencia un elevado rigor matemático. Fue el fundador del análisis secuencial; son notables sus aportaciones a la toma de decisiones bajo incertidumbre, y propuso una función de preferencias reveladas, que dista mucho de semejarse a las consideradas hoy día. Su criterio es también conocido como *Criterio Maximin o Criterio de Wald* y establece que para cada posible alternativa el ejecutivo determina cuál es el peor de los posibles resultados, esto es, el que le produce máximos perjuicios o beneficios mínimos. Selecciona entonces de entre todos estos últimos el que maximiza sus beneficios o minimiza sus pérdidas.

Leonard J. Savage (1917-1971), matemático estadounidense especializado en estadística. Su obra más conocida se titula *Foundations of Statistics* (Fundamentos de estadística) en el que introduce ciertos elementos sobre la teoría de la decisión. Este criterio, también conocido como *Criterio Minimax* se ocupa del costo de oportunidad de una decisión incorrecta. A partir de la matriz de pagos se construye una nueva matriz llamada la matriz de arrepentimiento.

La idea bajo este enfoque es la protección del ejecutivo contra costos de oportunidad excesivos. Para protegerse a sí mismo, el ejecutivo aplica el criterio del minimax a la matriz de arrepentimiento. La pérdida máxima en cada renglón se identifica y la alternativa cuyo renglón tiene el menor de los arrepentimientos es seleccionada por el ejecutivo. La principal deficiencia de este criterio es ignorar todos los elementos de la matriz de arrepentimiento salvo el mayor, desperdiciándose gran cantidad de información.

2.1 Constructor

Chip Conley es un joven contratista que tiene la oportunidad de elegir entre construir una casa o hacer dos trabajos de de ampliación en los siguientes dos meses. Si construye la casa y puede venderla ganaría $10 000. Sin embargo, si el mercado inmobiliario declina debido a aumentos en la tasa de interés hipotecario, Chip no podría venderla y tal vez perdería $5 000. Por otro lado, puede ganar $7 000 llevando a cabo los dos trabajos de ampliación, sin que importe el comportamiento del mercado.

a. Elaborar una matriz de pagos para este problema.
b. Elija una alternativa utilizando cada uno de los modelos de decisión que sean apropiados para este tipo de problema.
c. Si Chip Conley ha decidido que la probabilidad de que la tasa hipotecaria aumente es de 0.6 y las cantidades, en pesos, son una medida adecuada de su utilidad, determinar la estrategia que debe seguir.

---

a. Elaborar la matriz de pagos.

	Estados de la Naturaleza	
Opciones	Aumento en la tasa de interés	Sin aumento
Construir una casa	-$5 000	$10 000
Dos trabajos de ampliación	$7 000	$7 000

b. Alternativas con los modelos de decisión:

Criterio Maximin de Wald

	Estados de la Naturaleza	
Opciones	Aumento en la tasa de interés	Sin aumento
Construir una casa	**-$5 000**	$10 000
Dos trabajos de ampliación	$7 000	**$7 000**

MÁX {-5 000, 7 000} ➡ 7 000

La alternativa seleccionada es ***hacer dos trabajos de ampliación***

Criterio Maximax de Baumol

	Estados de la Naturaleza	
Opciones	Aumento en la tasa de interés	Sin aumento
Construir una casa	-$5 000	**$10 000**
Dos trabajos de ampliación	**$7 000**	$7 000

MÁX {10 000, 7 000} ➡ 10 000

Según Baumol, bajo un criterio optimista, selecciona ***construir una casa***

Criterio de Savage

	Estados de la Naturaleza	
Opciones	Aumento en la tasa de interés	Sin aumento
Construir una casa	-$5 000	$10 000
Dos trabajos de ampliación	$7 000	$7 000

Matriz de Arrepentimiento

	Estados de la Naturaleza	
Opciones	Aumento en la tasa de interés	Sin aumento
Construir una casa	**$12 000**	0
Dos trabajos de ampliación	0	**$3 000**

MíN {12 000, 3 000} ➡ 3 000

La alternativa seleccionada es ***hacer dos trabajos de ampliación***

Criterio de Hurwicz

	Estados de la Naturaleza	
Opciones	Aumento en la tasa de interés	Sin aumento
Construir una casa	-$5 000	$10 000
Dos trabajos de ampliación	$7 000	$7 000

Pesimista

Construir una casa: (3/4)(-5000)+(1/4)(10000)= - 1 250

Hacer dos trabajos de ampliación: (3/4)(7000)+(1/4)(7000)= 7 000 MÁX {-1250, 7000} ➡ 7 000

Un pesimista selecciona ***hacer dos trabajos de ampliación***

Optimista

Construir una casa: (3/4)(10 000)+(1/4)(-5000)= 6250

Hacer dos trabajos de ampliación: (3/4)(7000)+(1/4)(7000)= 7 000

MÁX {6250, 7000} ➡ 7 000

Un optimista selecciona ***hacer dos trabajos de ampliación***

Análisis de sensibilidad

Opciones	Estados de la Naturaleza: Aumento de la tasa de interés	Sin aumento
Construir una casa	-$5 000	**$10 000**
Dos trabajos de ampliación	**$7 000**	$7 000

	0	0.25	0.5	0.75	1
Construir una casa	-5000	-1250	2500	6250	10000
Dos trabajos de ampliación	7000	7000	7000	7000	7000

La función lineal de ***construir una casa*** pasa por los puntos: $P_1(0, -5000)$, $P_2(1, 10000)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5000 - 10000}{0 - 1} = 15\,000$$

$$y - 10000 = 15\,000(x - 1)$$

$$\boldsymbol{y = 15\,000x - 5\,000}$$

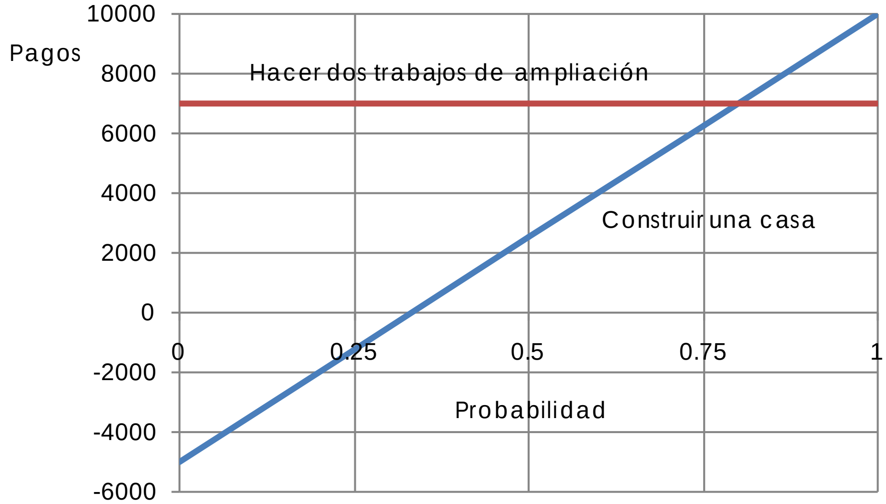
La función lineal de ***hacer dos trabajos de ampliación*** pasa por los puntos: $P_1(0, 7000)$, $P_2(1, 7\,000)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7000 - 7000}{0 - 1} = 0$$

$$y - 7000 = 0(x - 1)$$

$$\boldsymbol{y = 7000}$$

Se puede representar en la gráfica:



Análisis de sensibilidad

La Intersección de las dos rectas:

$$7000 = 15\,000x - 5\,000$$

$$\boldsymbol{x = 0.8}, \qquad \boldsymbol{y = 7000}$$

Para valores de x de 0 a 0.8 se elige ***hacer dos trabajos de ampliación*** y para valores de 0.8 a 1 se prefiere ***construir una casa*.**

c. Probabilidad de que la tasa hipotecaria aumente es de 0.6.

VME= (-5000)(0.6)+(10000)(0.4)=1000

VME= (7000)(0.6)+(7000)(0.4)= **7000**

	Estados de la Naturaleza		
Opciones	Aumento de la tasa de interés	Sin aumento	**VME**
Construir una casa	-$5 000	**$10 000**	1000
Dos trabajos de ampliación	**$7 000**	$7 000	7000
	0.6	0.4	

La mejor alternativa desde el criterio de mayor VME es **hacer dos trabajos de ampliación**.

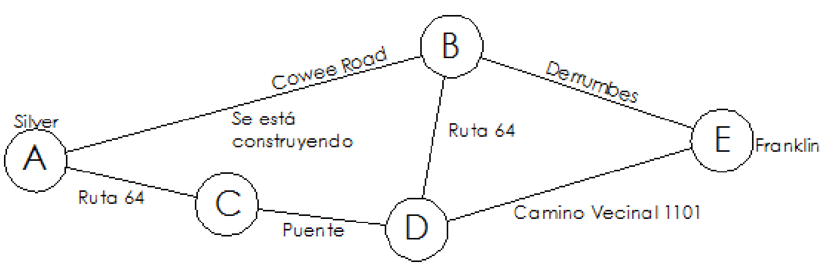
2.2 Rutas

Evelyn Brown es la despachadora de la una compañía de camiones en Silver City, en Dakota del Norte. En su trabajo, debe elegir las rutas para que los camiones hagan las entregas. Se conoce que una ruta específica que va de Silver City a Franklin ha ocasionado problemas en el pasado. Los problemas se deben a derrumbes e inundaciones cuando llueve. En la figura II.2 semuestran las diversas rutas que unen Franklin y Silver City con las demás áreas problemáticas. Los tiempos de viaje (minutos) en las rutas de recorrido son los siguientes:

Rutas	Tiempos de viaje, minutos
AB	30
AC	15
ACD	20
ABE	45
ACDE	50
DB	15
DE	30

Si se envía un camión de Silver City a través de ruta 64 y el puente no está funcionando, tendría que regresar a Silver City y dirigirse después a Cowee Road. De manera similar, si un camión va por Cowee Road y encuentra derrumbes, entonces tendría que regresar por la ruta 64 y dirigirse al camino vecinal 1101. Acaba de llover, y Evelyn intenta determinar cuál es la mejor ruta para enviar una flotilla de camiones, de manera que puedan evitarse las demoras en la medida posible. (Nota: puede haber inundaciones y derrumbes al mismo tiempo).

a. Elaborar una matriz de pagos que muestre todas las alternativas posibles, los estados de la naturaleza y los tiempos correspondientes de viaje.
b. Elegir el modelo de decisión que pueda utilizarse para seleccionar la alternativa que debe seguirse en este problema.
c. Hacer lo mismo utilizando un segundo modelo de decisión.



Rutas de los camiones

a) Matriz de pagos (tiempos)

	Estados de la Naturaleza		
Opciones	Derrumbes	Inundaciones	Ambas
Cowee Road	75	45	75
Ruta 64	50	75	105

b) Modelo de decisión

Criterio Maximin de Wald

	Estados de la Naturaleza		
Opciones	Derrumbes	Inundaciones	Ambas
Cowee Road	75	**45**	75
Ruta 64	**50**	75	105

MAX {45, 50}= 50

La alternativa según Wald (maximin), convendría que Evelyn mandara la flotilla de camiones por Cowee Road.

c) Utilizando otro modelo de decisión.

Criterio de Hurwicz

	Estados de la Naturaleza		
Opciones	Derrumbes	Inundaciones	Ambas
Cowee Road	75	**45**	75
Ruta 64	**50**	75	105

Pesimista

Cowee Road: (3/4)(75)+(1/4)(45)= 67.5

Ruta 64: (3/4)(105)+(1/4)(50)= 91.25

MIN {67.5, 91.25}= 67.5

La opción seleccionada es mandar la flotilla de camiones por Cowee Road.

Optimista

Cowee Road: (3/4)(45)+(1/4)(75)= 52.5

Ruta 64: (3/4)(50)+(1/4)(105)= 63.75

MIN {52.5, 63.75}= 52.5

La opción seleccionada es mandar la flotilla de camiones por Cowee Road.

Análisis de sensibilidad

Los valores más altos por fila:

	Estados de la Naturaleza		
Opciones	Derrumbes	Inundaciones	Ambas
Cowee Road	**75**	45	75
Ruta 64	50	75	**105**

	0	0.25	0.5	0.75	1
Cowee Road	45	52.5	60	67.5	75
Ruta 64	50	63.75	77.5	91.25	105

Las funciones lineales son:

Cowee Road: (1,75), (0, 45)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{45 - 75}{0 - 1} = 30$$

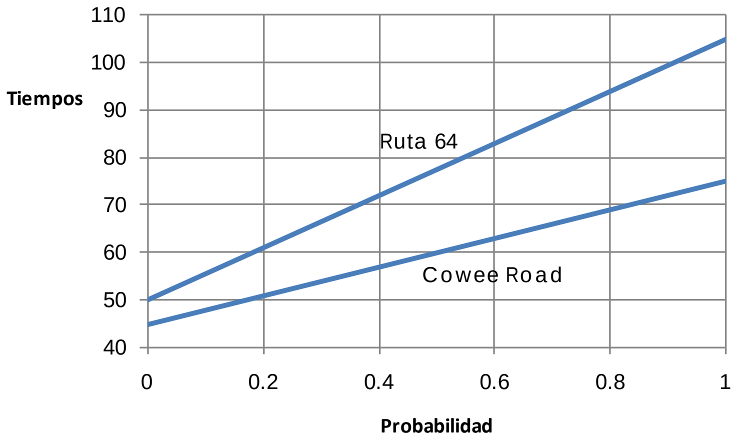
$$y - 75 = 30(x - 1)$$

$$\boldsymbol{y = 30x + 45}$$

Ruta 64: (1,105), (0, 50)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{50 - 105}{0 - 1} = 55$$

$$y = 55x + 50$$



Análisis de sensibilidad

De lo gráfica anterior se puede observar que la mejor opción en reducción de tiempos es que Evelyn indique ir siempre por Cowee Road.

2.3 Vendedor

Cada tres días, la Bishop Produce Company debe decidir cuántas cajas de fresas debe pedir para los siguientes tres días. Ben Jones, gerente de la Bishop Produce Company, ha determinado que si el clima es bueno en general durante ese periodo de tres días, puede vender 100 cajas, en tanto si el clima no es tan bueno puede vender sólo 75 cajas. Si el clima es malo, las ventas son muy deficientes y puede vender sólo 50 cajas durante los tres días. Dado que la duración de las fresas en los anaqueles es de sólo tres días, las fresas que no se venden deben retirarse y no tienen ningún valor de recuperación. Ben puede comprar fresas en $0.50 la caja y venderlas en $1.00 la caja.

Los registros pasados del clima muestran que para cualquier periodo de tres días, el clima es bueno 50% del tiempo, regular 20% del tiempo y malo 30% de las veces. Con base en los datos que se proporcionan:

a. Definir cuáles son las alternativas y los estados de la naturaleza para Ben (se suponen tres alternativas).
b. Elaborar la matriz de pagos.
c. Determinar la alternativa de mayores utilidades que podría emplear Ben para ordenar las fresas.
d. ¿Cuál es el valor de la información perfecta?

Ben Jones, ha iniciado trámites para suscribirse a un servicio meteorológico especial que cuesta $10 por periodo de tres días. La compañía que vende ese servicio la ha dado a Ben información con respecto a la efectividad de dicho servicio en los últimos cinco años. Esa información se presenta en forma de porcentaje de las veces que la compañía pronosticó en forma correcta uno de los tipos de clima que ocurrieron. Aconseje a Ben con respecto a si debe suscribirse o no al servicio de pronósticos meteorológicos.

Clima Pronosticado	**Clima que ocurrió en realidad**		
	Bueno	Regular	Malo
Bueno	0.4	0.3	0.2
Regular	0.4	0.4	0.3
Malo	0.2	0.3	0.5

---

a. Definir las alternativas y estados de la naturaleza:

	Estados de la Naturaleza		
Opciones	Bueno	Regular	Malo
Bueno	100	75	50
Regular	75	75	50
Malo	50	50	50

b. Matriz de Pagos

	Estados de la Naturaleza		
Opciones	Bueno	Regular	Malo
Bueno	50	25	0
Regular	37.5	37.5	12.5
Malo	25	25	25
	0.5	0.2	0.3

c. Alternativa que genera mayores utilidades.

	Estados de la Naturaleza			
Opciones	Bueno	Regular	Malo	VME
Bueno	50	25	0	**30**
Regular	37.5	37.5	12.5	**30**
Malo	25	25	25	25
	0.5	0.2	0.3	

Cálculo del Valor Monetario Esperado

Bueno: (50)(0.5)+(25)(0.2)+(0)(0.3)= **30**

Regular: (37.5)(0.5)+(37.5)(0.2)+(12.5)(0.3)= **30**

Malo: (25)(0.5)+(25)(0.2)+(25)(0.3)= 25

Las alternativas que generan mayores utilidades son las opciones de bueno y regular, de acuerdo al valor monetario esperado.

d. Valor de la Información Perfecta

VME_{IP}= (50)(0.5)+(37.5)(0.2)+(25)(0.3)= 40

VIP= 40-30= $**10.00**

El valor de la Información Perfecta (VIP) es de $10.00, que es igual al precio de suscribirse al servicio meteorológico; por lo tanto se justifica el análisis.

$P(A \mid E)$					**$P(A \mid E)\ P(E)$**				**Prob. Marg.**	**$P(E \mid A)$**			
		B1	R1	M1		B1	R1	M1			B1	R1	M1
Opciones	1	0.4	0.3	0.2	1	0.2	0.06	0.06	**0.32**	1	0.625	0.188	0.188
	2	0.4	0.4	0.3	2	0.2	0.08	0.09	**0.37**	2	0.541	0.216	0.243
	3	0.2	0.3	0.5	3	0.1	0.06	0.15	**0.31**	3	0.323	0.194	0.484
		0.5	0.2	0.3					Σ=1				

Probabilidades a priori

Probabilidades a posteriori

Las opciones 1,2 y 3 corresponden a los climas pronosticados bueno, regular y malo respectivamente, mientras que B1, R1 y M1 corresponde a los climas que ocurrieron en realidad: bueno, regular y malo. Utilizando las probabilidades a posteriori obtenidas y con la matriz de pagos se calculan los VME con los pronósticos del clima:

Con pronóstico de opción 1:

	VME
1 Bueno	**35.950**
2 Regular	32.838
3 Malo	25

Con pronóstico de opción 2:

	VME
1 Bueno	**32.45**
2 Regular	31.425
3 Malo	25

Con pronóstico de opción 3:

	VME
1 Bueno	21.00
2 Regular	**25.438**
3 Malo	25

VME de la Información:

VME_{INF} = (35.95)(0.32)+(32.45)(0.37)+(25.438)(0.31)= 31.396

VNI (Valor Neto de la Información):

VNI = 31.396-30 = 1.396

VNI = $1.396 < $10.00

NO es conveniente adquirir el servicio de pronósticos meteorológicos.

2.4 Programas

En cada uno de los juegos locales, los estudiantes locales de nivel medio superior venden programas. Los estudiantes pueden adquirir los programas en $1.00 y venderlos en $1.50. Los programas que no se venden carecen de valor después del juego, por lo que representan una pérdida para los estudiantes.

El número de programas que un estudiante individual puede vender depende de la cantidad de personas que acude al juego. Dado que muchos aficionados adquieren boletos en la entrada, no hay manera de saber con anticipación la cantidad de personas que acude a cualquier juego. Al estudiar los registros anteriores de asistencia, David Alfonso, un vendedor local de programas, ha determinado que se venden todos los boletos 50% de las veces, se vende 90% de la capacidad del estadio 30% de las veces y el 20% de los juegos tienen una entrada del 80% de sus capacidad. Sus registros de ventas muestran que cuando hay un “lleno completo” puede vender 200 programas; cuando hay una entrada del 90% puede vender 150 programas, y cuando es del 80% puede vender 100 programas. Si usted fuera amigo de David, ¿cuántos programas le sugeriría comprar para vender en cada uno de los juegos?

Definir las alternativas y estados de la naturaleza.

Número de Programas que puede Comprar	Programas vendidos, según el lleno del Estadio		
	Lleno	90%	80%
200	200	150	100
150	150	150	100
100	100	100	100
	0.5	0.3	0.2

Matriz de Pagos

Número de Programas que puede Comprar	Programas vendidos, según el lleno del Estadio			
	Lleno	90%	80%	**VME**
200	100	25	-50	47.5
150	75	75	0	**60**
100	50	50	50	50
	0.5	0.3	0.2	

Cálculo del Valor Monetario Esperado

200 Programas: (1000)(0.5)+(25)(0.3)+(-50)(0.2)= 47.5

150 Programas: (75)(0.5)+(75)(0.3)+(0)(0.3)= **60**

100 Programas: (50)(0.5)+(50)(0.3)+(50)(0.2)= 50

La alternativa que genera mayor utilidad es la opción de adquirir 150 programas, de acuerdo a su valor monetario esperado.

2.5 Valor de la información

Un individuo acaba de recibir una cantidad suficiente de dinero que le permite considerar cuáles son las inversiones disponibles. Ha decidido que sólo hay tres tipos que se ajustan a sus necesidades, que son: fondos monetarios, acciones y bonos. La elección depende de la tasa preferencial, puesto que el rendimiento sobre la inversión estaría en función de esta tasa de interés. En la actualidad la tasa preferencial es del 12%, pero se considera bastante inestable y puede subir o bajar en forma considerable en año próximo. Con base en el rendimiento actual sobre las inversiones, ha preparado las siguientes tablas que muestran el valor de una inversión de $100 000 después de un año, dependiendo de la tasa preferencial al final del año.

Opciones	Tasa preferencial al final del año		
	8%	12%	15%
Acciones	125 000	110 000	60 000
Bonos	140 000	112 000	75 000
Mercado de dinero	108 000	112 000	115 000

Ha entrevistado a diversos profesores en economía y ha determinado que el 40% de ellos considera que la tasa preferencial se reducirá, el 30% opina que subirá. En estas condiciones, ¿Cuál es el valor de la información perfecta?

También le han comentado que un servicio de pronósticos afirma estar en posibilidades de pronosticar las tasas futuras de interés. El servicio puede obtenerse por $5 000. La tabla muestra los resultados anteriores del servicio de pronósticos.

Cambio Pronosticado en la Tasa	Cambio real en la tasa preferencial		
	Aumento	Igual	Baja
Aumento	60%	20%	10%
Igual	20%	50%	30%
Baja	20%	30%	60%

Determinar si el individuo debe utilizar el servicio de pronósticos.

Matriz de Pagos

Opciones	Tasa preferencial al final del año			VME
	8%	12%	15%	
Acciones	25 000	10 000	-40 000	1 000
Bonos	40 000	12 000	-25 000	**12 100**
Mercado de dinero	8 000	12 000	15 000	11 300
	0.4	0.3	0.3	

VME:

Acciones: (25 000)(0.4)+(10 000)(0.3)+(-40 000)(0.3)= 1 000

Bonos: (40 000)(0.4)+(12 000)(0.3)+(-20 000)(0.3)= **12 100** (Mayor)

Mercado de dinero: (8 000)(0.4)+(12 000)(0.3)+(15 000)(0.3)= 11 300

La opción que genera mayor utilidad es *Bonos*, de acuerdo a su valor monetario esperado.

Valor de la Información Perfecta:

VME $_{IP}$ = (40 000)(0.4)+(12 000)(0.3)+(15 000)(0.3)= 24100

VIP = 24 100-12 100= **$12 000**

El valor de la Información Perfecta (VIP) es de $12000 > $5000 (el costo por adquirir el servicio de pronósticos); por lo que se justifica el análisis:

P(A|E)					P(A|E) P(E)					P(E|A)			
		A	I	B		A	I	B			A	I	B
Opciones	1	0.1	0.2	0.6	1	0.04	0.06	0.18	0.28	1	0.142	0.214	0.643
	2	0.3	0.5	0.2	2	0.12	0.15	0.06	0.33	2	0.364	0.455	0.182
	3	0.6	0.3	0.2	3	0.24	0.09	0.06	0.39	3	0.615	0.231	0.154
		0.4	0.3	0.3					Σ=1				

Probabilidades a priori

Probabilidades a posteriori

Donde las opciones 1,2 y 3 corresponden a los cambios pronosticados de la tasa aumento, igual y baja respectivamente. Mientras que A, I y B corresponde a los cambios que ocurrieron en realidad en la tasa preferencial, aumento, igual y baja correspondientes. Es importante destacar que la posición actual de la tasa de interés es del 12 %.

Utilizando las probabilidades a posteriori obtenidas y con la matriz de pagos se calculan los VME con los pronósticos de cambios en la tasa:

Con pronóstico de Aumento (Opción 1):

	VME
1 Aumento	-20 000
2 Igual	-7 880
3 Baja	**13 240**

Con pronóstico de Igual (Opción 2):

	VME
1 Aumento	6 300
2 Igual	**15 300**
3 Baja	10 980

Con pronóstico de Baja (0pción 3):

	VME
1 Aumento	11 550
2 Igual	**23 410**
3 Baja	9 890

VME de la Información:

VME_{INF} = (0.28)(13 240)+(0.33)(15 300)+(0.39)(23 410)= 17 886.1

Valor neto de la información:

VNI = 17 886.1-12 100= 5786.1

VNI= $5786.1

El valor neto de la información ($5786.1) > costo de la información ($5000), por lo que se acepta adquirir la información para la toma de decisiones.

2.6 Compra de terrenos

Una empresa está estudiando la compra de unos terrenos en los que es probable que haya gas. Si encuentra gas, la empresa podrá enajenar los terrenos obteniendo un beneficio de 125,000,000 de pesos, o bien explotarlos ella misma en cuyo caso los beneficios dependerán de la demanda, si ésta es alta los beneficios serán de 200,000,000 de pesos, en caso contrario, si la demanda es baja los beneficios solo alcanzarán los 75,000,000 de pesos. La probabilidad a priori de que la demanda sea alta o baja, es exactamente la misma. En el caso de no encontrar gas en dichos terrenos, la empresa soportará unas pérdidas de 50,000,000 de pesos, si bien la probabilidad de encontrar gas según los expertos es del 70 %. Determinar si la empresa debe o no adquirir los terrenos.

Alternativas de decisión:

Comprar los terrenos

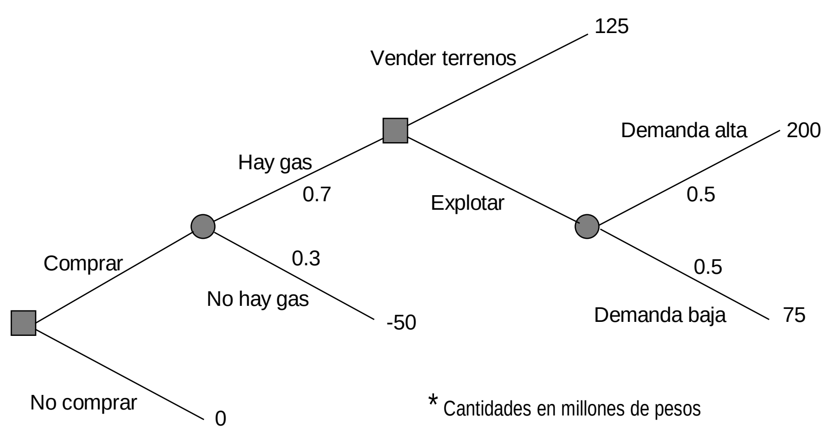
No comprar los terrenos

Para cada alternativa asociar el estado de la naturaleza:

Alternativas	Estados de la naturaleza
Comprar los terrenos	Hay gas en los terrenos No hay gas en los terrenos
No comprar los terrenos	

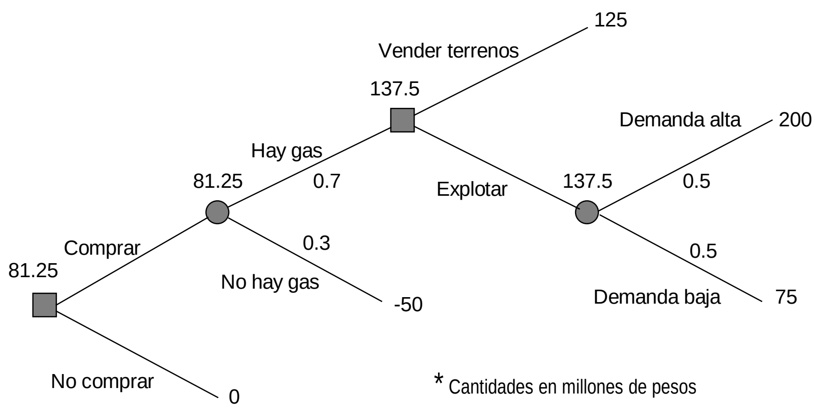
Si compra los terrenos y en ellos encuentra gas, debe decidir si revende los terrenos o si por el contrario la empresa prefiere explotar el gas contenido en dichos terrenos, en cuyo caso, la demanda de gas podrá ser alta o baja.

Árbol de decisión, probabilidades y beneficios:



Árbol de decisión

Solución del árbol de derecha a izquierda:



Árbol de decisión

La decisión que debe tomar la empresa es la de comprar los terrenos, esperando obtener unos beneficios de 81,250,000 pesos. Si en los terrenos se encuentra gas, la decisión que deberá adoptar la empresa es la de explotar el gas contenido en dichos terrenos.

2.7 Vendedor de Periódicos

Un vendedor de periódicos compra la unidad en $1.2 y lo vende en $2. Si un periódico no se vende lo debe devolver a la editorial recibiendo $0.20 como valor de recuperación. Esto quiere decir que un periódico que se venda deja una utilidad de $0.80, mientras que un periódico que no se venda deja una pérdida de $1. La demanda de periódicos es variable, depende de factores sociales y otros. La demanda de periódicos diaria en los últimos dos meses es:

17	15	16	18	18	20	17	15	15	19
16	17	16	17	17	15	19	17	19	18
18	19	19	18	20	18	17	18	18	19
18	16	18	17	19	19	19	18	20	18
20	17	17	20	20	20	18	17	16	16
18	15	17	18	17	17	16	18	17	16

¿Cuántos periódicos debe adquirir?

Frecuencias y la probabilidad asociada

Núm. Periódicos	Frecuencia	Probabilidad
15	5	0.083
16	8	0.13
17	15	0.25
18	16	0.27
19	9	0.15
20	7	0.12
∑	60	1.00

Matriz de Pagos

	Número Periódicos	Demanda						
		15	16	17	18	19	20	VME
Adquiere	15	12	12	12	12	12	12	12
	16	11	12.8	12.8	12.8	12.8	12.8	12.656
	17	10	11.8	13.6	13.6	13.6	13.6	**13.078**
	18	9	10.8	12.6	14.4	14.4	14.4	13.05
	19	8	9.8	11.6	13.4	15.2	15.2	12.536
	20	7	8.8	10.6	12.4	14.2	16	11.752
		0.08	0.13	0.25	0.27	0.15	0.12	

Con el cálculo de VME se observa que el mayor ingreso sucede cuando adquiere 17 periódicos.

2.8 Mantenimiento

Una empresa está estudiando el contrato de 600 pesos semanales que tiene con su proveedor de servicios de mantenimiento. Desde la firma del contrato la media es 2.5 averías semanales, entrañando cada fallo un costo de reparación de 1000 pesos. Las averías semanales de la empresa antes de la firma del contrato, se muestran en la tabla:

Averías	0	1	2	3	4	5	6
Semanas que hubo estas averías	9	10	12	16	24	18	11

¿Conviene a la empresa la renovación o no del contrato de mantenimiento con su actual proveedor?

Las probabilidades *a priori* asociadas a cada estado de la naturaleza. La probabilidad (frecuencia relativa) de cada estado de la naturaleza está dado por:

Frecuencia relativa = frecuencia absoluta / Número de casos

El número total de casos = 100, por lo que las probabilidades son:

Averías	0	1	2	3	4	5	6
Semanas que hubo estas averías	9	10	12	16	24	18	11
Probabilidad	0.09	0.10	0.12	0.16	0.24	0.18	0.11

El costo de mantenimiento antes y después de la firma del contrato con el proveedor de mantenimiento.

El número esperado de averías por semana antes de la firma del contrato:

(0x0.09)+1x0.10)+(2x0.12)+(3x0.16)+(4x0.24)+(5x0.18)+(6x0.11) = 3.34 averías/semana

Costo de las reparaciones antes de la firma del contrato:

3.34 averías/semana x 1000 pesos/avería = 3340 pesos/semana

Costo del servicio de mantenimiento actual tras la firma del contrato:

Costo del servicio + costo de las reparaciones =

600 pesos/semana + (2.5 averías/semana x 1000 pesos/avería) = 3100 pesos/semana

A la empresa le conviene renovar el contrato de mantenimiento con su actual proveedor, dado que con él se ahorra:

3340 – 3100 = 240 pesos/semana

2.9 Inversión

Suponer que se disponen de $10 000 dólares para invertir y existen dos alternativas de inversión: acciones de la compañía A y acciones de la compañía B. Una acción de cualquiera de las dos compañías cuesta $1 dólar y se cree que aumentará a $2 si la compañía tiene un buen desempeño y que la acción quedará sin valor si el desempeño es malo. Cada compañía tiene una probabilidad de 50 % de marchar bien. Si se decide que se invertirán sólo $4 000 y se evalúan las siguientes alternativas:

- Alternativa 1: Invertir sólo en la empresa A
- Alternativa 2: Invertir la mitad en la empresa A y mitad en la empresa B

Calcular las utilidades asociadas a cada alternativa y mostrar gráficamente que la estrategia diversificada le entregará una mayor utilidad.

Invertir todo en A: Con un 50 % de probabilidad se obtienen $6 000 (se pierden los 4 000 invertidos y sólo quedan los $6 000) y con un 50 % se obtendrán finalmente $14 000 (se doblan los $4 000 de la inversión: $8 000 más los $6 000 = $14 000)

Por lo tanto: *E(ingreso invertir sólo en A) = 0.5*6 000 + 0.5*$14 000 = $10 000*

Este nivel de ingreso tiene asociado un nivel de utilidad U1.

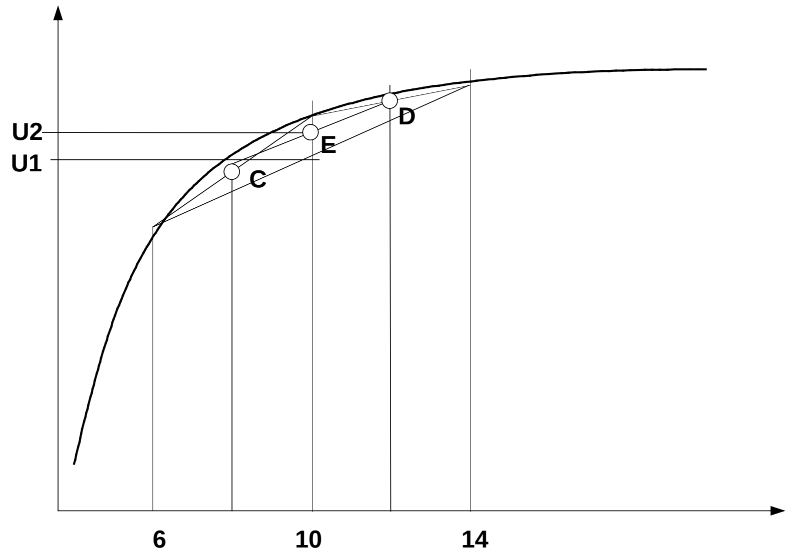
Invertir $2 000 en A y $2 000 en B. Se tienen 4 escenarios posibles:

	B: resultado malo	B: resultado bueno
A: resultado bueno	6 000	10 000
A: resultado malo	10 000	14 000

En este caso se observa que el resultado del ingreso esperado es el mismo*, E(Ingreso al diversificar = $10000)*

La diferencia está en que esta alternativa es menos riesgosa, porque sólo en el 25 % de los casos se queda con $6 000

Para ver el nivel de utilidad asociado: del promedio de 6 000 y 10 000 se obtiene el punto C, del promedio de 10 000 y 14 000 se obtiene el punto D, y del promedio de C y D se obtiene E, asociado al nivel de utilidad U2, lo cual se observa en la gráfica:



Función utilidad

Claramente el nivel de utilidad U2 es mayor que el nivel de utilidad U1. Eso muestra que al diversificar se tiene una mayor utilidad.

Función utilidad	2.10 Actitud frente a riesgo

Se presenta información de una persona acerca de su curva de utilidad.

Utilidad total, unidades	Ingreso, miles de pesos
100	5.0
80	2.6
60	1.6
40	1.0
20	0.4
0	0.0

a) ¿Se podría decir que esta persona es afín, neutra o con aversión al riesgo al riesgo? Explicar.

Suponer que a esta persona le ofrecen un empleo como vendedora, en el que existe una probabilidad de 50 % de obtener $4 000 al mes y una probabilidad de 50 % de no tener ingreso alguno.

b) ¿Cuál es el ingreso esperado si toma ese empleo? ¿Cuál sería la utilidad esperada?

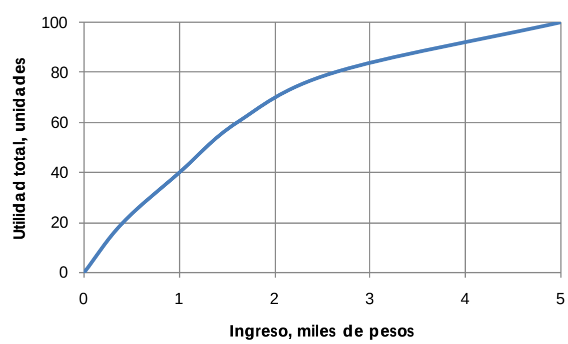
c) Aproximadamente ¿Cuánto tendría que ofrecer otra empresa para convencerla de no tomar el empleo de ventas con ingresos inciertos? Explicar y graficar la respuesta.

d) Suponer ahora, que esta persona ha comprado una pequeña cabaña para pasar los fines de semana en la ladera de una loma pronunciada e inestable. Esta persona gastó toda su riqueza de $5 000 en este proyecto. Hay una probabilidad de un 75 % de que la casa se desplome y no tenga valor alguno. ¿Cuánto estará dispuesta a pagar por una póliza de seguros que le pague $5000 si la casa se desploma? Explicar la respuesta.

---

a) Dos maneras de responder:

1) Graficar los valores dados y notar que se trata de una persona con aversión al riesgo porque resulta una curva cóncava:



Ingresos vs utilidades

2) Observar que ante una misma variación de utilidad (de 20 en 20) la variación del ingreso es cada vez mayor comenzando desde el punto 0. Por lo tanto es adversa al riesgo.

b) El ingreso esperado, son los ingresos que se espera obtener en promedio:

*E(I) = 4 000 * 0.5 + 0 * 0.5 = 2 000*

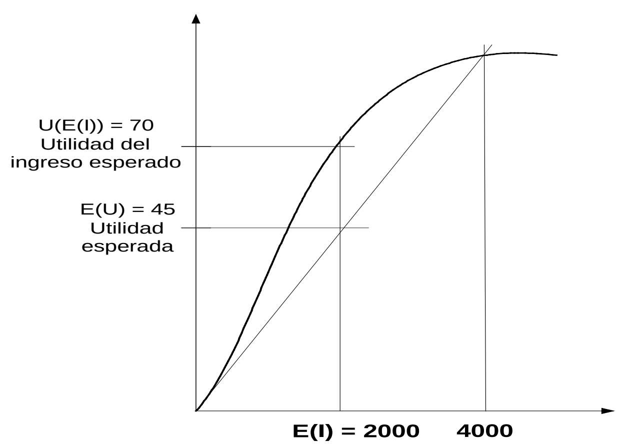
La utilidad esperada, es la utilidad que se espera tener en promedio:

*E(U) = U(4 000)*0.5 + U(0)*0.5*

Como no se tiene el valor exacto de la utilidad asociada a un ingreso de $4 000,se puede estimar: Se sabe que el valor de $4 000 está entre $2 600 y $5 000. Se podría ver en forma gráfica o tomar un valor de utilidad entre 80 y 100. Para facilitar los cálculos, se tomará un valor de utilidad de 90.

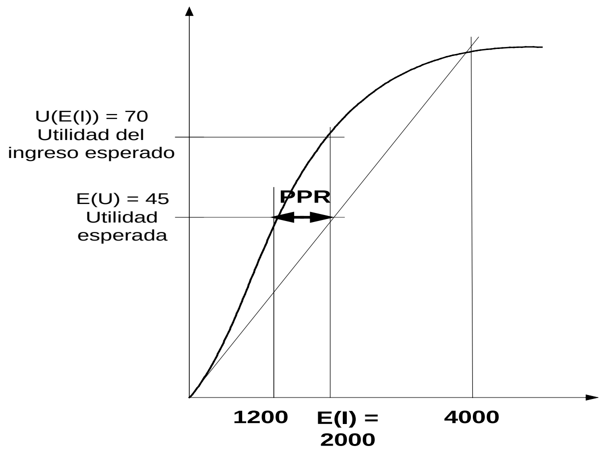
*E(U) = 90*0.5 +0*0.5 = 45*

¡Importante! : No es lo mismo haber calculado la utilidad asociada al ingreso esperado de $2 000 (estimada en 70), porque eso sería la utilidad del ingreso esperado y se necesita calcular la utilidad esperada (Figura II.8):



Función utilidad

c) Lo que se debe ofrecer a esta persona por no aceptar este empleo es el ingreso cierto asociado a un mismo nivel de utilidad esperada. Este valor lo buscamos en la tabla, y como no existe ningún punto asociado a un nivel de utilidad de 45 se estima: se sabe que estará entre 40 y 60 asociado a un nivel de ingreso entre 1.0 y 1.6, suponiendo que a 45 le corresponde 1.2. Por lo tanto se le debe ofrecer 1200. Además se tiene que la diferencia entre 2000 y 1200 es el premio por riesgo. Se observa en la figura:



Función utilidad

d) Es una persona con aversión al riesgo. Se deben comparar los ingresos de la riqueza sin seguro y con seguro, luego la diferencia será lo que esté dispuesto a pagar por el seguro. Se debe tener cuidado en comparar ingresos ciertos, y no inciertos. Sin el seguro se tendrá una riqueza cierta de $5 000. Esto porque aunque la casa se desplome, el seguro compensará la pérdida, por lo tanto se termina con $5 000.

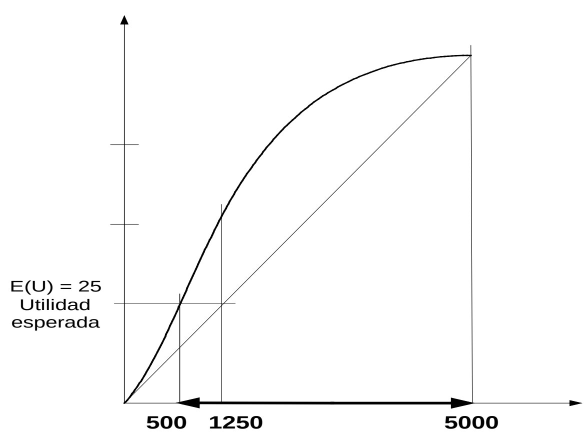
Se sabe que sin el seguro se tendrá un valor de la riqueza al final:

*E(riqueza sin seguro) = 5 000*0.25 + 0*0.75 = 1 250*

Sin embargo, no se puede comparar este 1 250 con el 5 000 porque el primero se trata de un valor incierto, por lo tanto, se busca el ingreso cierto asociado a al mismo nivel de utilidad esperada. Se calcula la utilidad esperada:

*E(U sin seguro) = U(5 000)*0.25 +U(0)*0.25 = 100*0.25 + 0*0.75 = 25*

El nivel de ingreso (riqueza) cierta asociada a este nivel de utilidad es aproximadamente 500 (se sabe que el valor está entre 20 y50, asociado a ingresos entre 0.4 y 1.0, se supone que será 500. Gráficamente:



Función utilidad

Por lo tanto, lo que esta persona con aversión al riesgo, pagará por el seguro es la diferencia entre el ingreso cierto con seguro y el ingreso cierto asociado al mismo nivel de utilidad esperada de la alternativa incierta, es decir: $5 000 - $500 = $4 500.

3 CADENAS DE MARKOV

Andrei Andreyevich Markov

Nació el 14 de junio de 1856 en Ryazan, Rusia y murió el 20 de julio de 1922 en Petrogrado, (hoy San Petersburgo). Los primeros trabajos de Markov fueron sobre teoría de números y análisis, fracciones continuas, límites de integrales, teoría de aproximación y convergencia de series. Después de 1900, Markov aplica los métodos de fracciones continuas, que había comenzado su maestro Pafnuty Chebyshev[1], a la Teoría de Probabilidades. Markov fue el más elegante portavoz y continuador de las ideas de Chebyshev. Destaca su aportación al teorema de Jacob Bernoulli conocido como la Ley de Los Grandes Números, a dos teoremas fundamentales de probabilidad debidos a Chebyshev, y al método de los mínimos cuadrados.

Markov estuvo también interesado en la poesía y realizó estudios de estilos poéticos. Aunque desarrolló su teoría de cadenas, desde un punto de vista totalmente teórico, también aplicó estas ideas a cadenas de dos estados, *vocales y consonantes,* en los textos literarios. Fue un participante activo en el movimiento liberal ruso antes de la primera guerra mundial, criticó públicamente a las autoridades estatales y fue miembro de la Academia de Ciencias de su país. Tuvo un hijo que nació el 9 de septiembre de 1903, y quien fue también un reconocido matemático. En 1923, Norbert Wiener[2] fue el primero en tratar rigurosamente los Procesos de Markov Continuos; y en 1930 Andrei Kolmogorov[3] enuncia teorías importantes acerca de los procesos de Markov.

la propiedad de Markov se refiere a la propiedad de ciertos procesos estocásticos por la cual *carecen de memoria*, lo que significa que la distribución de probabilidad del valor futuro de una variable aleatoria depende de su valor presente, pero es independiente de la historia de dicha variable. A los procesos que satisfacen esta condición se les conoce como procesos de Markov.

---

[1] Pafnuty Chebyshev fue un matemático del siglo XIX (1821-1894), creador de varias escuelas matemáticas en Rusia, sus trabajos matemáticos en las cuatro ramas son los siguientes: Mecanismos y Teoría de la Aproximación de Funciones, Teoría de los Números, Teoría de Probabilidades y Teoría de Integración.

[2] Norbert Wiener, Matemático estadounidense (1894-1964), en la década de 1920 participó, junto con Banach, Helly y *Von Neumann*, en el desarrollo de la teoría de los espacios vectoriales; más tarde, orientaría su atención hacia las series y las transformadas de Fourier y la teoría de números.

[3] Andrei Kolmogorov, Matemático soviético (1903-1987), que formuló una definición axiomática de la probabilidad, y que contribuyó a la creación de la teoría de la probabilidad.

3.1 El agente de ventas

Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades, A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad el día siguiente, si no tiene trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es de 0.4, la de tener que viajar a B es de 0.4 y la de tener que ir a A es de 0.2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20% tendrá que seguir en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con una probabilidad de 0.2. Por último, si el agente comercial trabaja todo el día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad de 0.1, irá a B con una probabilidad de 0.3 y a C con una probabilidad de 0.6.

a. ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?
b. Si hoy el viajante está en C, ¿Cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

---

a. Matriz de transición y porcentajes en cada una de las ciudades (probabilidades estacionarias)

Ciudad en la que se Encuentra	Ciudad a la que va a viajar		
	A	B	C
A	0.1	0.3	0.6
B	0.2	0.2	0.6
C	0.2	0.4	0.4

$$[x \quad y \quad z] * \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Se crea un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} x &= 0.1x + 0.2y + 0.2z \\ y &= 0.3x + 0.2y + 0.4z \\ z &= 0.6x + 0.6y + 0.4z \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Con Excel®, se puede resolver el sistema de ecuaciones lineales mediante la multiplicación de la matriz inversa por el vector de términos independiente

Introducir matriz en Excel® →

-9	2	2	1
3	-8	4	1
6	6	-6	1
1	1	1	1

Posicionarse en cualquier celda fuera de la matriz e introducir **=MINVERSA(seleccionar matriz**

-9	2	2	1
3	-8	4	1
6	6	-6	1
1	1	1	1

ENTER

=MINVERSA(B7:E10)

NOTA: La última columna de la matriz de transición introducida corresponde a *unos*, estos se agregan para hacer de la consistente a la matriz.

Seleccionar un espacio de (m x n) iniciando en el resultado arrojado, en este caso es de 4 x 4.

F2

=MINVERSA(B7:E10)

Presionar al mismo tiempo

CTRL SHIFT ENTER

-0.12121212	-0.03030303	-0.03030303	0.18181818
-0.07323232	-0.16414141	-0.08080808	0.31818182
-0.13888889	-0.13888889	-0.22222222	0.5
0.33333333	0.33333333	0.33333333	0

Multiplicación de matriz inversa por términos independientes

0
0
0
1

Situarse en una celda cualquiera y teclear:
=MMULT(MATRIZ INVERSA,TÉRMINOS INDEPENDIENTES)

-0.12121212	-0.03030303	-0.03030303	0.18181818		0
-0.07323232	-0.16414141	-0.08080808	0.31818182		0
-0.13888889	-0.13888889	-0.22222222	0.5		0
0.33333333	0.33333333	0.33333333	0		1

=MMULT(B14:E17,G14:G17)

ENTER

Seleccionar un espacio de 1 x 4, incluyendo el resultado obtenido

F2

=MMULT(B14:E17,G14:G17)

CTRL SHIFT ENTER

0.18181818
0.31818182
0.5
0

X= 2/11=0.181818

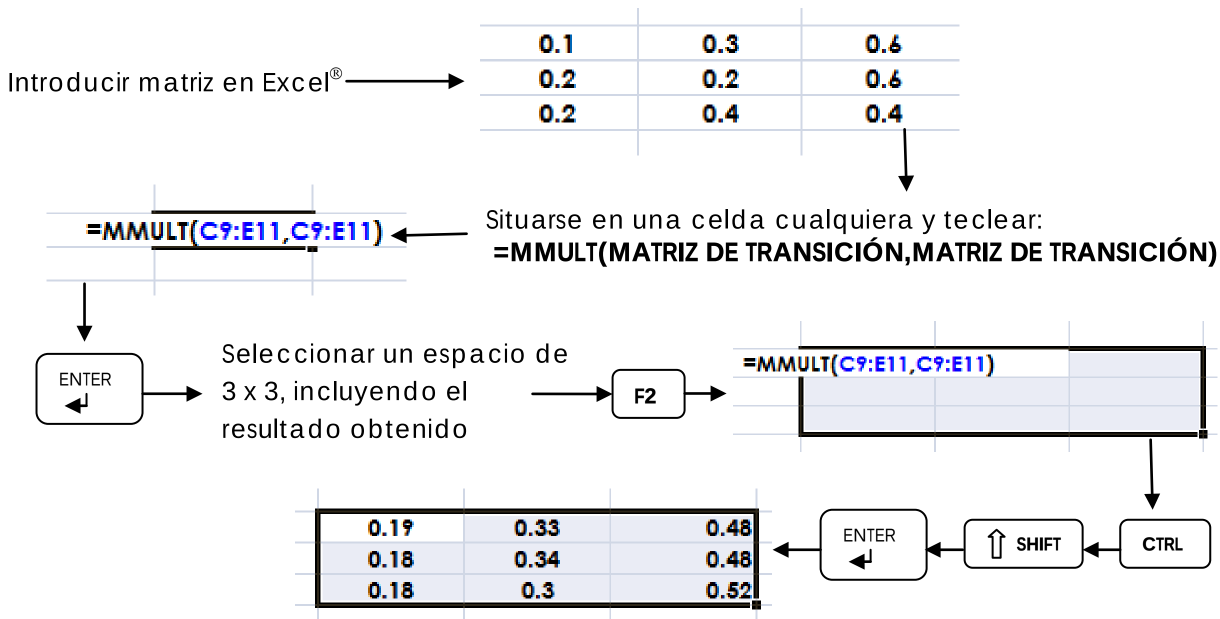
Y=7/22= 0.3181

Z=1/2= 0.5

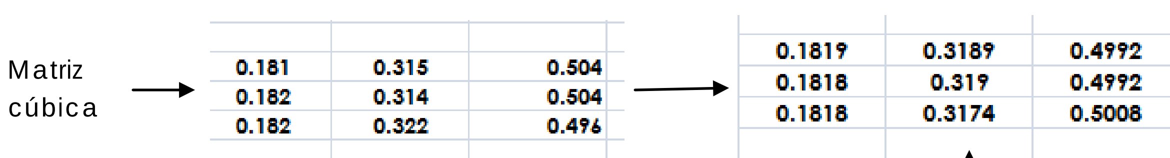
El porcentaje de que el agente esté en A es 18.18 %, en B= 31.82 % y en C= 50 %.

b. Probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días:

Para esto es necesario transportar a la matriz de transición al cuarto estado o sea a la potencia cuarta la cuarta potencia, también se puede utilizar *Excel®*.



Ahora bien, hay que recordar que únicamente se multiplicó dos veces la matriz de transición; por lo tanto, hay que repetir el mismo proceso en dos ocasiones; es decir, al multiplicar la matriz obtenida anteriormente por la de transición, la resultante será cúbica, por ello hay que repetir el proceso de multiplicación de esa matriz obtenida (cúbica) nuevamente por la matriz de transición para que finalmente obtengamos la matriz requerida.



$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 0.1819 & 0.3189 & 0.4992 \\ 0.1818 & 0.319 & 0.4992 \\ 0.1818 & 0.3174 & \mathbf{0.5008} \end{bmatrix}$$

Matriz a la cuarta potencia

La probabilidad de que esté en C y tenga que quedarse ahí al cabo de 4 días es aproximadamente es de 0.5008

3.2 Supermercados

En una comunidad hay tres supermercados (S1, S2 y S3), existe la movilidad de un cliente de uno a otro. El 1 de septiembre, ¼ de los clientes va al S1, 1/3 al S2 y un 5/12 al S3 de un total de 10 000 personas. Cada mes el S1 retiene al 90 % de sus clientes y pierde el 10 % que se va al S2. Se averiguó que el S2 sólo retiene el 5 % y pierde el 85 % que va al S1 y el resto se va al S3, el S3 retiene sólo el 40 %, pierde el 50 % que va al S1 y el 10 % va al S2.

a. Establecer la matriz de Transición.
b. ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de noviembre?
c. Hallar el vector de probabilidad estable.

---

a. Matriz de transición

El cliente está en el supermercado	Supermercado al que se va el Cliente		
	S1	S2	S3
S1	0.9	0.1	0
S2	0.85	0.05	0.1
S3	0.5	0.1	0.4
	0.25	1/3	5/12

b. Proporción de clientes para los supermercados después de 2 meses.

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.895 & 0.095 & 0.01 \\ 0.8575 & 0.0975 & 0.045 \\ 0.735 & 0.095 & 0.17 \end{bmatrix}$$

$$[1/4 \quad 1/3 \quad 5/12] * \begin{bmatrix} 0.895 & 0.095 & 0.01 \\ 0.8575 & 0.0975 & 0.045 \\ 0.735 & 0.095 & 0.17 \end{bmatrix} = (0.8155 \quad 0.0958 \quad 0.0883)$$

El mercado S1 después de dos meses tendrá una clientela del 81.55 %, el S2 tendrá el 9.58 % y el S3 el 8.83 % del total de clientes.

c. Hallar el vector de probabilidad estable.

$$[x \quad y \quad z] * \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones lineales:

$$-x + 8.5y + 5z = 0$$
$$x - 9.5y + z = 0$$
$$0x + y - 6z = 0$$
$$x + y + z = 1$$

El vector de probabilidades estables es:

$$[\mathbf{0}.888 \quad 0.0952 \quad 0.0158]$$

Para la solución se procede de la manera descrita con anterioridad utilizando Excel®.

3.3 Matriz de transición

La Avertz Company renta su flotilla de 500 automóviles. Se inspecciona cada automóvil una vez a la semana. Durante este tiempo, pudo haber estado rentado, pudo habérsele dado mantenimiento, o pueden haber sucedido ambas cosas. En la primera semana de junio, se determinó que 400 automóviles estaban en condiciones de ser rentados, 80 necesitaban reparaciones menores y 20 necesitaban reparaciones mayores. En la segunda semana de junio, 350 automóviles que estaban en buenas condiciones se encontraban en las mismas circunstancias, 40 necesitaban reparaciones menores y 10 necesitaban reparaciones mayores. De los 80 automóviles que necesitaban reparaciones menores, 50 se encontraban en buenas condiciones, 25 seguían requiriendo reparaciones menores y otros 5 requerían ahora reparaciones mayores. Por último, de los 20 automóviles que requerían reparaciones mayores, 15 estaban en buenas condiciones, 3 requerían reparaciones menores y 2 seguían necesitando reparaciones mayores. Elabore la matriz de transición para este problema.

Matriz de transición:

	Buena Condición	Reparación Menor	Reparación Mayor
Buena Condición	350	40	10
Reparación Menor	50	25	5
Reparación Mayor	15	3	2

$$\Downarrow$$

	Buena Condición	Reparación Menor	Reparación Mayor
Buena Condición	0.875	0.1	0.025
Reparación Menor	0.625	0.3125	0.0625
Reparación Mayor	0.75	0.15	0.1

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0.875 & 0.1 & 0.025 \\ 0.625 & 0.3125 & 0.0625 \\ 0.75 & 0.15 & 0.1 \end{bmatrix}$$

3.4 Matriz de transición

La Bulldog Construction Company ha ganado un contrato para construir una carretera que vaya al área del Monte de Santa Helena en Washington. Esta carretera ayudará a estudiar los efectos de la explosión volcánica de 1980. La compañía ha determinado que el polvo volcánico obstruirá los filtros de las máquinas con mucha rapidez y provocará que los camiones dejen de funcionar. Los filtros se revisan todos los días y se clasifican como recién limpiados, parcialmente obstruidos o totalmente obstruidos. Experiencias anteriores han demostrado que un filtro que se acaba de limpiar tiene una probabilidad de 0.1 de permanecer limpio, una probabilidad de 0.8 de quedar parcialmente obstruido y una probabilidad de 0.1 de quedar totalmente obstruido. Un filtro que ya está parcialmente obstruido tiene una probabilidad de 0.5 de permanecer en el mismo estado y una probabilidad de 0.5 de quedar totalmente obstruido. Para poder utilizar un camión que tiene un filtro totalmente obstruido éste se debe limpiar primero.

a. Elabore una matriz de transición para este problema.
b. Si un camión deja de operar, esto le cuesta a la compañía $100 por el tiempo perdido y $20 para limpiar el filtro. ¿Cuánto le costará a la compañía seguir una política de no limpiar filtros sino hasta que se detengan los camiones?

---

a. Matriz de transición

	Recién limpiados	Parcialmente obstruidos	Totalmente obstruidos
Recién limpiados	0.1	0.8	0.1
Parcialmente Obstruidos	0	0.5	0.5
Totalmente Obstruidos	1	0	0

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. ¿Cuánto le costará a la compañía seguir una política de no limpiar filtros sino hasta que se detengan los camiones?

Sistema de ecuaciones lineales:

$$[x \quad y \quad z] * \begin{bmatrix} 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = 0.1x + z$$
$$y = 0.8x + 0.5y$$
$$z = 0.1x + 0.5y$$
$$x + y + z = 1$$

Nuevamente con la ayuda del software Excel y repitiendo los pasos realizados en las páginas 26 y 27, se puede obtener los valores de las incógnitas y determinar así los porcentajes. Los valores obtenidos se muestran a continuación.

X= 0.2857

Y=0.4571

Z=0.2571

Para obtener el costo de no limpiar filtros hasta que estén totalmente obstruidos: la suma del costo del tiempo perdido ($100) y el costo para limpiar el filtro ($20) por la probabilidad de que estén totalmente obstruidos (Z):

Costo (filtros totalmente obstruidos) = ($100 + $20) 0.2571= 30.852

Le costará a la compañía $30.852 seguir la política de no limpiar filtros sino hasta que se detengan los camiones.

3.5 El ascensor

El ascensor de un edificio con bajo y dos pisos realiza viajes de uno a otro piso. El piso en el que finaliza el viaje n-ésimo del ascensor sigue una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten del bajo se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso, sólo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en el bajo. Se pide:

a. Calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena.
b. Dibujar el grafo asociado.
c. ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada uno de los tres pisos?

---

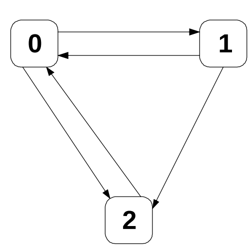
a. La matriz de transición tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Donde $p_{01} = P(R_n = 1 \mid R_{n-1} = 0) = 1/2$: *probabilidad de que ascensor se encuentre en la planta 1, si en la etapa anterior estaba en la planta baja*, por lo que la matriz de transición es:

Piso en el que se encuentra	Piso al que se dirige		
	0	1	2
0	0	0.5	0.5
1	0.75	0	0.25
2	1	0	0

b. Grafo asociado



Grafo del ascensor

c. Probabilidad de que se encuentre en cada uno de los tres pisos.

$$[x \quad y \quad z] * \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4x - 3y - 4z = 0$$
$$x - 2y = 0$$
$$2x + y - 4z = 0$$
$$x + y + z = 1$$

De donde:

X = 0.470

y = 0.2352

z = 0.2941

La probabilidad de que se encuentre en la planta baja es 0.47, en la planta 1 es de 0.2352 y en la planta 2 es de 0.2941.

3.6 Distribución del mercado

Los consumidores de café en el área de Pontevedra usan tres marcas A, B, C. En marzo de 1995 se hizo una encuesta en la que se entrevistó a las 8450 personas que compran café y los resultados fueron:

Compra actual	Marca A	Marca B	Marca C	TOTALES
Marca A	507	845	338	1690
Marca B	676	2028	676	3380
Marca C	845	845	1690	3380
TOTALES	2028	3718	2704	8450

a) Si las compras se hacen mensualmente, ¿Cuál será la distribución del mercado de café en Pontevendra en el mes de junio?

b) A la larga, ¿Cómo se distribuirán los clientes de café?

Matriz de transición

	Marcas		
	A	B	C
A	0.3	0.5	0.2
B	0.2	0.6	0.2
C	0.25	0.25	0.5
	0.24	0.44	0.32

a) Distribución del mercado en el mes de junio:

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0.237 & 0.485 & 0.278 \\ 0.236 & 0.486 & 0.278 \\ 0.2425 & 0.4525 & 0.305 \end{bmatrix}$$

b) Probabilidades estacionarias:

$$[x \quad y \quad z] * \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{gathered} 7x - 2y - 2.5z = 0 \\ -5x + 4y - 2.5z = 0 \\ -2x - 2y + 5z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{gathered}$$

Los valores obtenidos son los siguientes:

$$x = 0.2380$$

$$y = 0.4761$$

$$z = 0.2857$$

A la larga, la distribución del mercado será: la marca A tendrá el 23.8 % del mercado, B tendrá el 47.61 % y C tendrá el 28.57 %.

3.7 Probabilidades estacionarias

Suponga que toda la industria de refresco produce dos colas: Coca Cola y Pepsi Cola. Cuando una persona ha comprado Coca Cola hay una probabilidad de 90 % de que siga comprándola a la vez siguiente. Si una persona toma Pepsi, hay un 80% de que repita la vez siguiente.

a. Si una persona actualmente es comprador de Pepsi. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de ahora?
b. Si una persona actualmente es comprador de Coca Cola. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora?
c. Supongamos que el 60% de toda la gente toma hoy Coca Cola y el 40% Pepsi. A tres compras a partir de ahora, ¿Qué fracción de los compradores estará tomando Coca Cola?

---

a. Si es comprador de Pepsi. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas dos compras a partir de ahora?

	Coca Cola	Pepsi
Coca Cola	0.9	0.1
Pepsi	0.2	0.8
	0.6	0.4

Matriz de transición

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ \mathbf{0.34} & 0.66 \end{bmatrix}$$

Hay una probabilidad del 34% de que pasadas dos compras consuma Coca Cola.

b. Si una persona actualmente es comprador de Coca Cola. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Coca Cola pasadas tres compras a partir de ahora?

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.781} & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{bmatrix}$$

Hay una probabilidad del 78.1 % de que pasadas tres compras consuma Coca Cola.

c. Suponer que el 60 % de toda la gente toma hoy Coca Cola y el 40 % Pepsi. A tres compras a partir de ahora, ¿Qué fracción de los compradores estará tomando Coca Cola?
d.

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.6438} & \mathbf{0.3562} \end{bmatrix}$$

Hay una probabilidad del 64.38 % de que pasadas tres compras un comprador consuma Coca Cola.

3.8 Crédito

Una tienda de departamentos regional y grande, la Silverland's, tiene un plan de crédito en sus tiendas. Cada mes se clasifican esas cuentas en cuatro categorías: saldadas, con saldo insoluto, con saldo vencido y como cuenta perdida. Las cuentas saldadas son las que no tienen saldo a pagar en el mes; las cuentas con saldo insoluto son las que no adeudan saldos en el mes anterior, pero les han cargado compras realizadas en el mes; las cuentas vencidas son las que tienen un saldo que ha permanecido sin pagarse durante más de un mes, pero menos de tres. Por último, las cuentas perdidas son las que tienen un saldo con más de tres meses de vencido y que no se espera poder cobrar.

De los registros de la tienda, se ha determinado que el 60% de las cuentas con saldo insoluto se pagan al siguiente mes, 30% permanece en la misma categoría y 10% se convierte en saldo vencido. También se ha determinado que el 40% de las cuentas vencidas se convierten en saldos insolutos, 30% se pagan, 20% permanecen vencidas y 10% se cancelan como cuentas perdidas. Una vez que una cuenta llega a la categoría de perdida, se cancela. De manera similar, una vez que una cuenta pasa a la categoría de saldada, ese dinero ya no es parte de las cuentas por cobrar.

a. Escriba la matriz de transición para este problema.
b. Si en la actualidad existen \$100000 de las cuentas por cobrar en la categoría de saldadas, \$50000 en la categoría de saldo insoluto, \$20000 en la categoría de saldos vencidos y \$5000 en la categoría de cuentas perdidas, ¿qué cantidad habrá en cada categoría al mes siguiente? ¿Y al mes después de éste?

---

a. Matriz de transición

	Cuentas saldadas	Cuentas con saldo insoluto	Cuentas con saldo vencido	Cuenta perdida
Cuentas saldadas	1	0	0	0
Cuentas con saldo insoluto	0.6	0.3	0.1	0
Cuentas con saldo vencido	0.3	0.4	0.2	0.1
Cuenta perdida	0	0	0	1

b. Cantidad de cada tipo de cuentas pasados dos y tres meses.

Pasados dos meses:

$$\begin{bmatrix}100000 & 50000 & 20000 & 5000\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}136000 & 23000 & 9000 & 7000\end{bmatrix}$$

Pasados tres meses:

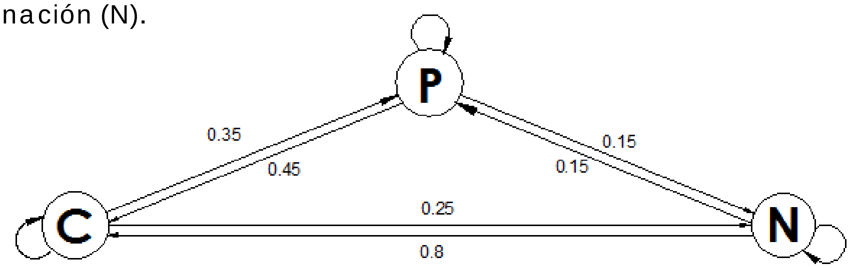
$$\begin{bmatrix}100000 & 50000 & 20000 & 5000\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}152500 & 10500 & 4100 & 7900\end{bmatrix}$$

Se pueden resumir los resultados:

	Cuentas saldadas	Cuentas con saldo insoluto	Cuentas con saldo vencido	Cuenta perdida
A un mes	$136 000	$23 000	$9 000	$7 000
A dos meses	$152 500	$10 500	$4 100	$7 900

3.9 Probabilidades de transición

Una maestra de matemáticas, no queriendo parecer predecible, decide asignar las tareas basándose en probabilidades. El primer día de clases, dibuja este diagrama en el pizarrón para decir a los estudiantes, si en la próxima clase les espera una asignación completa (C), una asignación parcial (P) o sin asignación (N).



Grafo de asignaciones

a. Construir y etiquetar la matriz de transición correspondiente al diagrama.
b. Si los estudiantes tienen hoy una asignación completa, ¿cuál es la probabilidad de que tengan una asignación completa de nuevo la próxima clase?
c. Si hoy no tienen asignación, ¿cuál es la probabilidad de que no tengan una asignación de nuevo la próxima clase?
d. Hoy es miércoles y los estudiantes tienen una asignación parcial. ¿Cuál es la probabilidad de que no tengan tareas el viernes?
e. La matriz A es la matriz de transición para un día. Encontrar la matriz de transición para dos días (por ejemplo, si hoy es lunes, ¿cuáles son las oportunidades de cada clase de asignación el día miércoles?).
f. Encontrar la matriz de transición para tres días.
g. Si no se tienen tareas este viernes, ¿cuál es la probabilidad de que no se tengan tareas el próximo viernes? (considerar sólo cinco días de escuela a la semana). Dar respuesta exacta para dos decimales.
h. Encontrar, con dos decimales, la matriz con la cual la matriz A converge después de muchos días.
i. Explicar el significado de la solución en el inciso h.

a. Matriz de Transición.

	Completa	Parcial	Sin asignación
Completa	0.4	0.35	0.25
Parcial	0.45	0.4	0.15
Sin asignación	0.8	0.15	0.05

b. ¿Cuál es la probabilidad de que tengan una asignación completa de nuevo la próxima clase?

$$\begin{array}{c} C \\ P \\ N \end{array}\begin{bmatrix} \mathbf{0.4} & 0.35 & 0.25 \\ 0.45 & 0.4 & 0.15 \\ 0.8 & 0.15 & 0.05 \end{bmatrix}$$

La probabilidad es el 40 %.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que no tengan una asignación de nuevo la próxima clase?

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.35 & 0.25 \\ 0.45 & 0.4 & 0.15 \\ 0.8 & 0.15 & \mathbf{0.05} \end{bmatrix}$$

La probabilidad es del 5 % de que no tengan asignación la próxima clase.

d. ¿Cuál es la probabilidad de que no tengan tareas el viernes?

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.35 & 0.25 \\ 0.45 & 0.4 & 0.15 \\ 0.8 & 0.15 & 0.05 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0.5175 & 0.3175 & 0.165 \\ 0.48 & 0.34 & \mathbf{0.18} \\ 0.4275 & 0.3475 & 0.225 \end{bmatrix}$$

La probabilidad de que no tengan asignación el día viernes es del 18 %.

e. Encontrar la matriz de transición para dos días.

$$A^2 = \begin{array}{c} C \\ P \\ N \end{array}\begin{bmatrix} 0.5175 & 0.3175 & 0.165 \\ 0.48 & 0.34 & 0.18 \\ 0.4275 & 0.3475 & 0.225 \end{bmatrix}$$

f. Encontrar la matriz de transición para tres días.

$$A^3 = \begin{array}{c} C \\ P \\ N \end{array}\begin{bmatrix} 0.481875 & 0.332875 & 0.18525 \\ 0.489 & 0.331 & 0.18 \\ 0.507375 & 0.322375 & 0.17025 \end{bmatrix}$$

g. ¿cuál es la probabilidad de que no se tengan tareas el próximo viernes?

$$A^5 = \begin{array}{c} C \\ P \\ N \end{array}\begin{bmatrix} 0.488345 & 0.330547 & 0.181108 \\ 0.488888 & 0.330348 & 0.180765 \\ 0.490088 & 0.329861 & \mathbf{0.180051} \end{bmatrix}$$

La probabilidad de que no tengan tareas el próximo viernes, considerando una semana como 5 días, es del 18 %.

h. Probabilidades estacionarias:

$$\begin{array}{cc} x \quad y \quad z * \begin{bmatrix} 0.4 & 0.35 & 0.25 \\ 0.45 & 0.4 & 0.15 \\ 0.8 & 0.15 & 0.05 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} C \\ P \\ N \end{array} \end{array}$$

$$-6x + 4.5y + 8z = 0$$
$$3.5x - 6y + 1.5z = 0$$
$$2.5x + 1.5y - 9.5z = 0$$
$$x + y + z = 1$$

Los resultados son:

x = 0.4888839

y = 0.33330357

z = 0.180804

i. Explicar el significado de la solución en el inciso h.

Si se consideran dos decimales, las probabilidades estacionarias ya no tienen cambio.

En la industria de la cerveza *ligera*, tres marcas comparten aproximadamente el 75 % de todas las ventas; la Sudco, la Mills y la Schotz. Estas tres marcas compiten de forma intensa por los clientes de la cerveza *ligera*. En tiempos recientes, la Sudco hizo que una agencia externa llevara a cabo un estudio sobre la forma en que los clientes estaban reaccionando a los anuncios. Los resultados del estudio mostraron que después de tres meses, el 50 % de los clientes de la Sudco seguían prefiriendo la Suds Lite, el 30 % preferían la Mills Light Beer y el 20 % preferían la Schotz Easy Beer. De los clientes de la Mills, el 60 % seguían prefiriendo la Mills Light Beer, el 30 % preferían la Suds Lite y el 10 % preferían la Schotz Easy. De los clientes de la Schotz, 40 % seguían prefiriendo su marca, 30 % preferían la Sudco y el 30 % preferían la Mills.

a. Elabore la Matriz de Transición para este problema de cambios de marca.
b. Determine el porcentaje de estado estacionario de los clientes que prefieren cada tipo de cerveza.

Matriz de Transición

	Sudco	Mills	Schotz
Sudco	0.5	0.3	0.2
Mills	0.3	0.6	0.1
Schotz	0.3	0.3	0.4

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

a. Estado estacionario de la matriz de transición.

$$[x \quad y \quad z] * \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones

$$-5x + 3y + 3z = 0$$
$$3x - 4y + 3z = 0$$
$$2x + y - 6z = z$$
$$x + y + z = 1$$

Los valores obtenidos se muestran a continuación:

$$x = 0.374999$$

$$y = 0.42857$$

$$z = 0.1964283$$

En el largo plazo, el 37.5 % preferirán Sudco, el 42.857 % Mills y el 19.64 % Schotz.

4 LÍNEAS DE ESPERA

Uno de los principales factores que motivó al estudio de las *líneas de espera* es que tiene aplicación real en la vida cotidiana, de acuerdo a Azarang M. & García E., en su obra *Simulación y Análisis de Modelos Estocásticos (1997),* definen a una línea de espera *como el efecto resultante en un sistema cuando la demanda de un servicio supera la capacidad de proporcionar dicho servicio.* Un ejemplo de ello son las colas que se generan en los bancos, gasolineras, o incluso en el arribo de barcos a muelles, etc.

Es muy común que diversos autores denominen a las líneas de espera como *teoría de colas.* En 1910 uno de los primeros trabajos sobre filas lo realizó un ingeniero danés de teléfonos, *A. K. Erlang (1878-1929).* Erlang estaba interesado en los problemas que tenían las personas que llamaban a un conmutador telefónico, debido a que trabajaba en una compañía telefónica y se le presentó el problema clásico de la determinación de cuántos circuitos eran necesarios para proveer un servicio telefónico aceptable.

El objetivo de los modelos de líneas de espera es más de descripción que de optimización, y cualquier optimización que tenga lugar debe llevarla a cabo el usuario variando los parámetros del sistema para obtener diferentes conjuntos de características de operación. El conjunto de características de operación que se ajusta en forma más estrecha a las necesidades del usuario define la mejor estructura del sistema. Por esta razón, es común que los modelos de líneas de espera sean descriptivos más que normativos. Dado que muchos de los parámetros de los modelos de líneas de espera no se conocen con certidumbre, estos modelos son más bien estocásticos que determinísticos.

Los parámetros como tasas de llegada y tasas de servicio se describen a través de distribuciones de probabilidad; por ello, en el modelo se utilizan valores esperados o promedio. Al mismo tiempo, los modelos de líneas de espera son estáticos y no lineales en vez de dinámicos y lineales, debido a que se supone que los parámetros no varían con el tiempo y que los cambios en las características de operación no son proporcionales a los cambios en los parámetros del modelo.

4.1 Prueba de bondad de ajuste

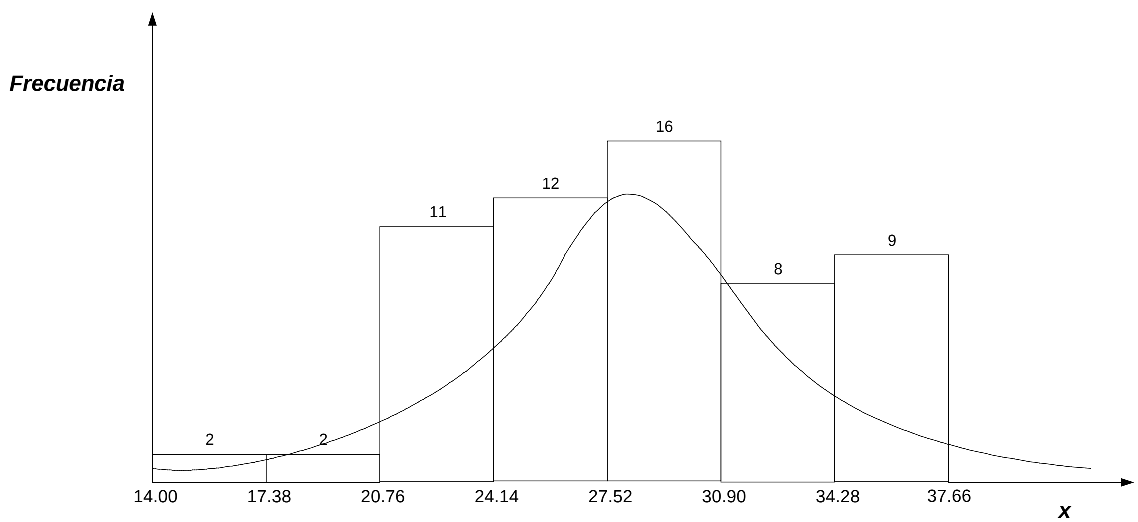
Las pruebas de bondad de ajuste tienen como objetivo determinar si los datos se ajustan a una determinada distribución. En la teoría estadística, las pruebas de bondad de ajuste más conocidas son la χ^2 y la Kolmogorov-Smirnov. A continuación se ejemplifica el proceso para realizar una prueba de bondad de ajuste con χ^2, para determinar si los datos empíricos se ajustan a una distribución normal.

Conjunto de datos:

32.5	15.2	35.4	21.3	28.4	26.9	34.6	29.3	24.5	31.0
21.2	28.3	27.1	25.0	32.7	29.5	30.2	23.9	23.0	26.4
27.3	33.7	29.4	21.9	29.3	17.3	29.0	36.8	29.2	23.5
20.6	29.5	21.8	37.5	33.5	29.6	26.8	28.7	34.8	18.6
25.4	34.1	27.5	29.6	22.2	22.7	31.3	33.2	37.0	28.3
36.9	24.6	28.9	24.8	28.1	25.4	34.5	23.6	38.4	24.0

Ordenar la información

Intervalos	14-17.38	17.38-20.76	20.76-24.14	24.14-27.52	27.52-30.9	30.9-34.28	34.28-41.04
Frecuencia	2	2	11	12	16	8	9



Frecuencias observadas y frecuencias esperadas

Media, variancia y desviación estándar de la distribución

Intervalo	M de clase	Frecuencia			
1	15.69	2	31.38	301.5968	5.026613333
2	19.07	2	38.14	158.42	2.640333333
3	22.45	11	246.95	335.1744	5.58624
4	25.83	12	309.96	54.9552	0.91592
5	29.21	16	467.36	24.6016	0.410026667
6	32.59	8	260.72	170.7552	2.84592
7	35.97	9	323.73	576	9.6
		60	1678.24		27.02505333

Media = 27.97 Desv. Est. = 5.199

Prueba de bondad de ajuste de los datos empíricos a una distribución normal

Intervalo	xi	Zi	A a la izq. de Zi	Área	ei	ei	oi	χ2
1	17.38	-2.036	0.0207	0.0207	1.242	4.9388	4	0.1784
2	20.76	-1.386	0.0823	0.0616	3.6968			
3	24.14	-0.736	0.2296	0.1473	8.838	8.838	11	0.5288
4	27.52	-0.086	0.4641	0.2345	14.07	14.07	12	0.3045
5	30.9	0.56	0.7123	0.2482	14.892	14.892	16	0.0824
6	34.28	1.21	0.8869	0.1746	10.476	10.476	8	0.5852
7	37.66	1.86	0.9686	0.0817	4.902	4.902	9	3.426
							χ2	**5.1053**

Donde:

x_i , límite superior de clase

$Zi = (x - \mu)/\sigma$

e_i , frecuencias esperadas

o_i , frecuencias observadas

$X^2 = \Sigma ((o_i – e_i)^2/ e_i)$

La prueba χ^2, es válida si las frecuencias esperadas son mayores de 5, en caso de no ocurrir, se suman con la o las siguientes frecuencias.

El ajuste de la distribución empírica a una distribución normal, se logra si $\chi^2_{\text{CALCULADA}} < \chi^2_{\text{TABLAS}}$, donde $\chi^2_{\text{TABLAS}} = \chi^2_{v,\alpha}$ en que el valor de v se obtiene con v = no. de intervalos – no. de parámetros que definen a la distribución normal – 1, y α es el nivel de significancia, que en una prueba de bondad de ajuste se considera como el 0.05 o 5 %:

$X^2_{\text{CALCULADA}} = 5.1053$

$v = 7 - 2 - 1 = 4$

$\alpha = 0.05$

$X^2_{\text{TABLAS}} = \chi^2_{4,\ 0.05} = 9.49$ (Tabla 4.4)

Por lo que se puede afirmar que la distribución empírica se ajusta a una distribución normal estándar con $\mu = 27.97$ y una desviación estándar $\sigma = 5.2$.

4.2 Selección del número de muelles

Una compañía siderúrgica que opera su propia flota de barcos para importar mineral de hierro, está considerando la construcción de facilidades portuarias para sostener una nueva planta. Se debe decidir tanto el número de lugares de descarga como el tipo de instalación en cada uno, con la idea de hacer mínimos los costos totales de descarga.

Se puede construir un máximo de tres lugares de descarga; y se requiere que cada uno de dichos lugares que se construya tenga el mismo tipo de instalación entre el tipo A, el B y el C, para los cuales se dispone de la siguiente información:

Tipo de instalación	Costo fijo por día	Costo de operación por día	Capacidad: tonelaje medio descargado por día de operación
A	$840	$840	3,600 ton
B	1,350	1,350	5,800 ton
C	1,500	1,600	6,400 ton

Los costos fijos incluyen elementos tales como la amortización del costo original de la instalación a lo largo de su vida esperada, mantenimiento general, etc.; se aplican estos costos a todos los días, bien sea que se use o no el equipo. Se incurre en los costos de operación únicamente durante los intervalos de tiempo en que el equipo de descarga está realmente en uso.

Cada uno de los barcos que va a descargarse trae 8,000 toneladas de mineral, y se considera que llegan según una distribución de Poisson durante todo el año con una tasa media de llegada de cinco barcos por semana. Los tiempos de servicio para un tipo dado de instalación se considera que son exponenciales, con una tasa media de servicio que corresponde a la capacidad de descarga.

Si el tiempo invertido en el sistema de descarga (tiempo de espera más tiempo de descarga) se considera que le cuesta a la compañía $2,000 por barco por día, ¿qué tipo de instalación de descarga debe seleccionarse, y que tantos lugares deben construirse?

Existen 9 alternativas posibles, de las cuales todas son factibles a excepción de la alternativa (A, 1), esto es, un muelle con instalación A, en la que la tasa media de llegadas λ es 5 barcos por semana/7 días = 0.7143 barcos por día y la tasa media de servicio μ es 3,600/8,000 = 0.45 barcos por día, de manera que la cola se haría enorme, ya que sería mayor el número de unidades que llegan que el número de unidades atendidas (factor de utilización $\rho > 1$) por lo que esta alternativa se puede eliminar:

Tipo de Instalación	Número de muelles		
	1	2	3
A		M/M/2	M/M/3
B	M/M/1	M/M/2	M/M/3
C	M/M/1	M/M/2	M/M/3

Alternativas factibles

Criterio de decisión: seleccionar la alternativa que genere el menor costo total, el cual se integrará con:

Costo fijo + Costo de espera + Costo de operación = Costo total

Parámetros del sistema:

Tasa de llegadas, λ = 0.7143 barcos por día

Tasa de servicio, μ_A = 0.450 barcos por día, μ_B = 0.725 barcos por día, μ_C = 0.800 barcos por día

Tabla 4.1 Características de operación para los modelos M/M/1 y M/M/S

Modelo	Fórmula	Concepto
M/M/1	$L=\frac{\rho}{1-\rho}$	Número promedio de unidades en el sistema
	$L_q=\frac{\rho^2}{1-\rho}$	Número promedio de unidades en la cola
	$W=\frac{L}{\lambda}$	Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema
	$W_q=\frac{L_q}{\lambda}$	Tiempo promedio que una unidad pasa en la cola
M/M/S	$P_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{n=S-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\frac{1}{S!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S\left(\frac{S\mu}{S\mu-\lambda}\right)}$	P_0 = Probabilidad de que el sistema esté desocupado **(Tabla 4.2)**
	$P_{SO}=\frac{\rho^S(\mu S)}{S!(\mu S-\lambda}P_0$	Probabilidad de que el sistema esté ocupado
	$L=P_{SO}*\frac{\rho}{S-\rho}+\rho$	Número promedio de unidades en el sistema
	$L_q=P_{SO}*\frac{\rho}{S-\rho}$	Número promedio de unidades en la cola
	$W=\frac{L}{\lambda}$	Tiempo promedio que una unidad pasa en el sistema
	$W_q=\frac{L_q}{\lambda}$	Tiempo promedio que una unidad pasa en la cola

Alternativas factibles:

ALT (A, 2)	2
λ	0.714
μ	0.450
ρ	1.587
Po	0.112
Pso	1.002
L	5.443
Lq	3.856
W	7.620
Wq	5.398
CF	1680.000
CO	1333.360
CE	10886.050
CT	**13899.41**

ALT (A, 3)	3
λ	0.714
μ	0.450
ρ	1.587
Po	0.188
Pso	0.266
L	1.887
Lq	0.299
W	2.641
Wq	0.419
CF	2520.000
CO	1333.360
CE	3773.053
CT	**7626.41**

ALT (B, 1)	1
λ	0.714
μ	0.725
ρ	0.985
Po	
Pso	
L	66.757
Lq	65.772
W	93.458
Wq	92.079
CF	840.000
CO	1330.076
CE	133514.019
CT	**135684.09**

ALT (B, 2)	2
λ	0.714
μ	0.725
ρ	0.985
Po	0.333
Pso	0.319
L	1.295
Lq	0.309
W	1.812
Wq	0.433
CF	2700.000
CO	1330.076
CE	2589.035
CT	**6619.11**

ALT (B, 3)	3
λ	0.714
μ	0.725
ρ	0.985
Po	0.364
Pso	0.086
L	1.027
Lq	0.042
W	1.438
Wq	0.059
CF	4050.000
CO	1330.076
CE	2054.884
CT	**7434.96**

ALT (C, 1)	1
λ	0.714
μ	0.800
ρ	0.893
Po	
Pso	
L	8.335
Lq	7.442
W	11.669
Wq	10.419
CF	1350.000
CO	1428.600
CE	16669.778
CT	**19448.4**

ALT (C, 2)	2
λ	0.714
μ	0.800
ρ	0.893
Po	0.339
Pso	0.244
L	1.090
Lq	0.197
W	1.526
Wq	0.276
CF	3000.000
CO	1428.600
CE	2179.837
CT	**6608.44**

ALT (C, 3)	3
λ	0.714
μ	0.800
ρ	0.893
Po	0.404
Pso	0.068
L	0.922
Lq	0.029
W	1.290
Wq	0.040
CF	4500.000
CO	1428.600
CE	1843.510
CT	**7772.11**

Resumen de costo total:

Tipo de Instalación	Número de muelles		
	1	2	3
A		13899.41	7626.41
B	135684.09	6619.11	7434.96
C	19448.4	**6608.44**	7772.11

Se debe utilizar el tipo de instalación C en dos muelles; aunque con un análisis de sensibilidad (simulación) se pudiera preferir dos muelles con instalación B, ya que son muy parecidos.

4.3 Decisión entre uno o dos talleres

Una compañía ferroviaria pinta sus propios carros de ferrocarril según se vayan necesitando. La alternativa 1 consiste en proporcionar 2 talleres de pintura en los que se pinta a mano (un carro a la vez en cada taller), con un solo costo anual de $300 000. El tiempo de pintado para cada carro es de 6 horas. La alternativa 2 consiste en proporcionar un taller de pintura aerosol que implica un costo anual de $400 000. En este caso, el tiempo de pintado por carro (de nuevo uno a la vez) es de 3 horas. Para ambas alternativas, los carros llegan de acuerdo a un proceso de Poisson con una tasa media de uno cada 5 horas. El costo del tiempo inútil por carro es de $50/hora. ¿Qué alternativa debe elegir la compañía ferroviaria? Supóngase que los talleres siempre están abiertos, es decir, trabajan 24x365 = 8 760 horas por año.

Como se observa en la descripción de problema la alternativa 1 corresponde a un sistema M/M/2 y la alternativa 2 a un sistema M/M/1.

	Alternativas		
	M/M/2	M/M/1	
λ	4.8	4.8	Unidades por día
μ	4	8	Unidades por día
ρ	1.2	0.6	Factor de utilización
P_0	0.25		Probabilidad de sistema desocupado, (Tabla 4.2)
P_{S0}	0.45		Probabilidad de sistema ocupado
L	1.875	1.5	Unidades en el sistema
L_q	0.675	0.9	Unidades en la cola
W	0.390625	0.3125	Días que una unidad pasa en el sistema
W_q	0.140625	0.1875	Días que una unidad pasa en la cola
Costo instalación	$821.918	$1 095.89	Por día
Costo espera	$2 250.00	$ 1800.00	Por día
Costo total	$3 071.92	**$2 895.89**	Por día

El criterio de decisión es seleccionar la alternativa de menor costo total, el cual se integra con los costos de instalación y los costos de espera. Los costos de instalación están dados por año como dato del problema; los costos de espera se determinan con el tiempo que un carro pasa en el sistema por el número de carros que llegan por día (λ) y por el costo de espera (W x λ x $50 x 24 horas).

De los costos totales por día, se observa que conviene utilizar un solo taller que pinta con aerosol.

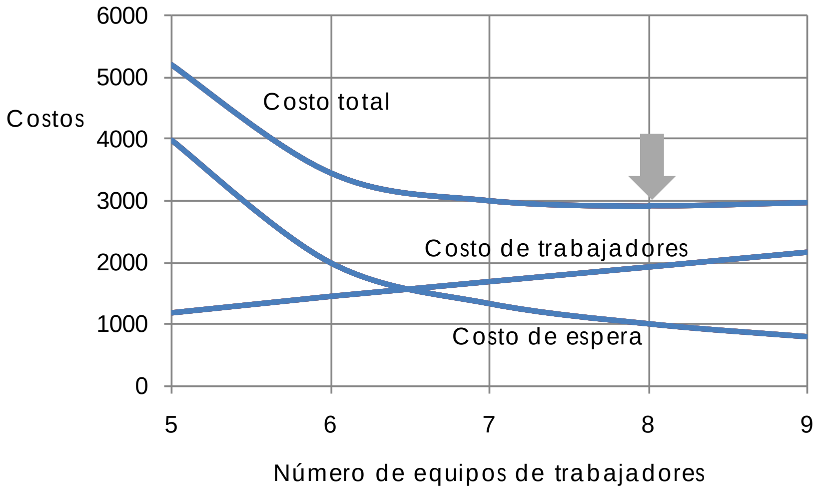
4.4 Decisión del número de equipos de trabajadores

Una compañía envía cereales al extranjero en barcos cargueros. La compañía no es propietaria de los barcos de carga sino simplemente le vende los granos al propietario de los barcos en los casos en que llega un carguero para ser atendido. Las naves llegan al azar, lo que sucede a una tasa promedio de una diaria. En el momento actual, existe espacio para cargar un solo barco a la vez. También debido a acuerdos contractuales, toda la labor de carga deben llevarla a cabo empleados de la compañía y no la tripulación del barco. Esto significa que mientras el barco espera ser cargado y mientras está siendo cargado, la tripulación permanece desocupada. Dado que la utilidad del propietario de los barcos depende de un tiempo breve, la compañía ha acordado pagar a los propietarios de los barcos $1 000 por día completo que el barco invierte en el muelle. De acuerdo con los registros de la compañía, un equipo de tres estibadores puede cargar los barcos a una tasa promedio de ¼ de barco por día. Los equipos pueden trabajar turnos de 8 horas, 7 días a la semana, y los trabajadores de cada equipo reciben de la compañía $10 por hora. Es necesario determinar cuántos equipos deben tenerse disponibles para cargar los buques y minimizar los costos totales.

Es un sistema M/M/1 en que varía el número de equipos de 3 trabajadores para cargar, por lo que el mínimo número de equipos a utilizar es 5, ya que con 4 no se supera a λ.

	Número de equipos				
	5	6	7	8	9
λ	1	1	1	1	1
μ	1.25	1.5	1.75	2	2.25
ρ	0.8	0.33	0.57	0.5	0.44
L	4	2	1.33	1	0.8
L_q	3.2	1.33	0.76	0.5	0.35
W	4	2	1.33	1	0.8
W_q	3.2	1.33	0.76	0.5	0.35
Costo por día de trabajadores	$1 200	$1 440	$1 680	$1 920	$2 160
Costo por día de espera	$4 000	$2 000	$1 333.33	$1 000	$800
COSTO DIARIO TOTAL	$5 200	$3 440	$3 013.33	**$2 920**	$2 960

El cálculo sugiere utilizar 8 equipos de trabajadores para minimizar los costos totales, que también se aprecia en la gráfica:


Costos
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
Costo total
Costo de trabajadores
Costo de espera
5
6
7
8
9
Número de equipos de trabajadores

4.5 Decisión del número de muelles

Una compañía utiliza sus propios barcos camaroneros para pescar camarón y después lo empaca para enviarlo a otras partes. Cuando estos botes llegan durante la temporada, hay que descargarlos tan rápido como sea posible para que puedan volver al mar. Se ha estimado que el costo de que un bote permanezca detenido es de $50 por hora (esto incluye los salarios al igual que el tiempo de pesca). Los trabajadores que descargan los botes ganan $8 por hora ya sea que estén trabajando o no. Si el patrón de llegadas para los botes es aleatorio y el tiempo de descarga también lo es, ¿Cuál es el número de trabajadores que la compañía necesita debe utilizar para descargar los botes y que produzca el menor costo total? Los botes camaroneros llegan a una tasa promedio de uno por hora y cada trabajador puede descargar medio bote por hora. Acaba de surgir una nueva oportunidad para la compañía. Puede rentar un muelle adyacente en $20 la hora para descargar los botes camaroneros durante la temporada fuerte de pesca. Determinar si sería redituable que la compañía rente ese espacio adicional al muelle. Suponer que todos los valores siguen siendo los mismos que en el problema original.

Sistema M/M/1

	Número de trabajadores				
	3	4	5	6	7
λ, botes por hora	1	1	1	1	1
μ, botes por hora	1.5	2	2.5	3	3.5
ρ, factor de utilización	0.66	0.5	0.4	0.333	0.286
L, botes en el sistema	2	1	0.66	0.5	0.4
L_q, botes en la cola	1.33	0.5	0.26	0.16	0.11
W, horas que un bote está en el sistema	2	1	0.66	0.5	0.4
W_q, horas que un bote está en la cola	1.33	0.5	0.26	0.16	0.11
Costo de trabajadores	$24	$32	$40	$48	$56
Costo de espera	$100	$50	$33	$25	$20
COSTO TOTAL	$124	$82	$73	**$73**	$76

Inicia el cálculo con tres trabajadores, porque si es un sistema M/M/1 se debe cumplir que $\mu > \lambda$.

Sistema M/M/2

	Número de trabajadores por muelle				
	2	3	4	5	6
λ, botes por hora	1	1	1	1	1
μ, botes por hora	1	1.5	2	2.5	3
ρ, factor de utilización	1	0.7	0.5	0.4	0.3
P_0, Probabilidad de sistema desocupado	0.33	0.49	0.6	0.66	0.73
P_{SO}, Probabilidad de sistema ocupado	0.33	0.16	0.1	0.06	0.04
L, botes en el sistema	1.33	0.74	0.53	0.41	0.34
L_q, botes en la cola	0.33	0.08	0.03	0.015	0.008
W, horas que un bote está en el sistema	1.33	0.74	0.53	0.41	0.34
W_q, horas que un bote está en la cola	0.33	0.08	0.03	0.015	0.008
Costo de trabajadores	$32	$48	$64	$80	$96
Costo de espera	$66.500	$37	$26.50	$20.50	$17
Costo adicional	$20	$20	$20	$20	$20
Costo total	$118.50	**$105.00**	$110.50	$120.50	$133.00

Inicia el cálculo con 2 trabajadores en cada muelle, ya que en el sistema M/M/2 se debe cumplir que $S\mu > \lambda$.

Al comparar la alternativa preferente del sistema M/M/1 (1 muelle con 6 trabajadores con un costo total de $73) con la alternativa preferente del sistema M/M/2 (2 muelles con 3 trabajadores en cada muelle, con un costo total de $105), ambas con 6 trabajadores, finalmente se sugiere utilizar un solo muelle para descarga.

4.6 Decisión del número de empleados

La compañía arrendadora de automóviles opera su propia instalación de lavado y limpieza de automóviles para prepararlos para su renta. Los automóviles llegan a la instalación de limpieza en forma aleatoria a una tasa de 5 por día. La compañía arrendadora ha determinado que los automóviles pueden limpiarse a un ritmo de 2n por día, en donde *n* es el número de personas que trabajan en el automóvil. Por ejemplo, si se encuentran 4 personas trabajando la tasa de lavado es de 8 automóviles por día. Se ha determinado que este procedimiento de lavado se ajusta a una distribución exponencial negativa. La compañía les paga a sus trabajadores $30 por día y ha determinado que el costo por un automóvil que no esté disponible para rentarlo es de $25 por día.

a. Calcular el número de empleados que deben contratarse en la instalación de lavado, para que se produzca menor costo.
b. Calcular las características de operación L, L_q, W, W_q para el número de empleados que eligió.

Sistema M/M/1

λ = 5 automóviles por día

μ = 2n automóviles por día

	n, número de empleados				
	3	4	5	6	7
λ	5	5	5	5	5
μ	6	8	10	12	14
ρ	0.833	0.625	0.5	0.416	0.357
P_0	0.166	0.375	0.5	0.583	0.642
L	5	**1.666**	1	0.714	0.555
L_q	4.166	**1.041**	0.5	0.297	0.198
W	1	**0.333**	0.2	0.142	0.111
W_q	0.833	**0.208**	0.1	0.059	0.039
Costo de trabajadores	$90	$120	$150	$180	$210
Costo por no disponibilidad	$125	$42	$25	$18	$14
Costo total	$215	**$162**	$175	$198	$224

a. La alternativa de menor costo total es utilizar 4 empleados en el sistema ($162)

b. Características de operación:

L= 1.666 automóviles promedio en el sistema

L_q= 1.041 automóviles promedio en la cola

W= 0.333 días en promedio pasa un automóvil en el sistema

W_q=0.208 días en promedio pasa un automóvil en la cola

4.7 Operación de caja rápida

La caja rápida de un supermercado atiende sólo clientes con 12 artículos o menos, y como resultado, es mucho más veloz para estos clientes que las filas normales. El gerente, ha estudiado esta fila y ha determinado que los clientes llegan a una tasa aleatoria de 30 por hora y que, en promedio, el tiempo de servicio para un cliente es de un minuto. Suponiendo que la tasa de servicio también es aleatoria, responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuáles son μ y λ para la caja rápida?
b. En promedio, ¿a cuántos clientes se está atendiendo o están esperando?
c. En promedio, ¿cuánto debe esperar un cliente antes de poder retirarse?

Sistema M/M/1

a. λ = 30 clientes por hora y μ = 60 clientes por hora.

b. La característica de operación es L = 1 cliente en promedio en el sistema

λ	30
μ	60
ρ	0.5
L	**1**
L_q	0.5
W	**0.0333**
W_q	0.0166

c. La característica de operación es W = 0.0333 horas en promedio que pasa un cliente en el sistema, 2 minutos.

4.8 Llamada de Erlang

Un hospital local está planeando ofrecer un servicio a la población en general. Este servicio consistirá en dar información médica sobre diversos temas a las personas que marquen el número de información del hospital, que es público. El hospital pronostica que habrá aproximadamente 10 llamadas por hora y serán de duración aleatoria. Una operadora contestará a las personas que llamen e intentará responder a sus preguntas. La experiencia ha demostrado que la llamada promedio dura 5 minutos. El hospital desea reducir la probabilidad de que las personas que llamen encuentren ocupada la línea, a menos de 0.05 aumentando las líneas telefónicas. Habrá sólo una línea telefónica por operador. Utilizar la fórmula de la Llamada Perdida de Erlang para calcular el número de líneas telefónicas necesarias para alcanzar el nivel deseado de probabilidad del hospital.

Para una llamada de Erlang:

$$P(llamada\ perdida) = \frac{\frac{\rho}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}$$

λ = 10 llamadas por hora

μ = 12 llamadas por hora

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{12} = 0.08333$$

Con n = 3 líneas:

$$P(llamada\ perdida) = \frac{\frac{0.08333}{3!}}{\frac{(0.0833)^0}{0!} + \frac{(0.0833)^1}{1!} + \frac{(0.0833)^2}{2!} + \frac{(0.0833)^3}{3!}} = 0.06099 > 0.050$$

Con n = 4 líneas:

$$P(llamada\ perdida) = \frac{\frac{0.08333}{4!}}{\frac{(0.0833)^0}{0!} + \frac{(0.0833)^1}{1!} + \frac{(0.0833)^2}{2!} + \frac{(0.0833)^3}{3!} + \frac{(0.0833)^4}{4!}} = 0.01511 < 0.050$$

El número de líneas telefónicas necesarias para alcanzar el nivel deseado de probabilidad del hospital son 4.

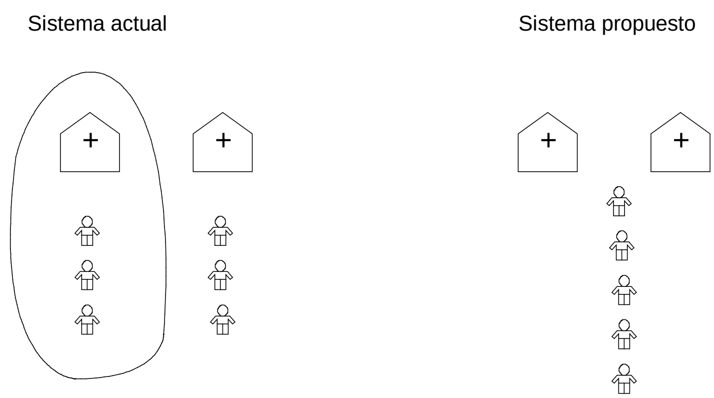
4.9 Operación de confesionarios

Un sacerdote utiliza en la actualidad dos confesionarios con filas separadas para atender las necesidades de los feligreses. Se ha observado que las llegadas son aleatorias, a un ritmo promedio de 30 personas por hora y el tiempo de servicio tiende a ser aleatorio también, puesto que la cantidad de pecados por persona puede diferir en gran medida. Se ha determinado que el tiempo promedio que se permanece en el confesionario es de 3 minutos. Se ha obtenido también que las llegadas se distribuyen en forma equitativa entre las dos líneas. El sacerdote está considerando cambiar a un sistema en que se utilice una sola fila que alimente ambos confesionarios. El padre desea saber qué sistema (el actual o el propuesto), conducirá al tiempo promedio más breve en el sistema para sus feligreses.

λ = 30 filigreses por hora

μ = 20 filigreses por hora

Sistema actual (dos sistemas M/M/1), basta analizar uno de ellos:



Sistema actual (dos sistemas M/M/1), basta analizar uno de ellos:

λ	15
μ	20
ρ	0.75
L	3
L_q	2.25
W	**0.2 hr, 12 min**
W_q	0.15 horas en la cola

Sistema propuesto (M/M/2):

λ	30
μ	20
ρ	1.5
P_0	0.1429 (Tabla 4.2)
P_{SO}	0.643
L	3.429
L_q	1.929
W	**0.1143 hr, 6.8 min**
W_q	0.064 hr, 3.9 min

Como se aprecia, con el sistema propuesto se tiene el menor tiempo que una persona pasa en el confesionario, por lo que se prefiere en lugar del sistema actual.

4.10 Operación de cajero automático

Suponer que para un cajero automático, los clientes llegan al azar y el tiempo necesario para dar servicio a un cliente es también aleatorio. Suponer además que la tasa de llegadas es de 5 por hora y la tasa de servicio es de 10 por hora. Responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente se le atienda de inmediato, a su llegada, en la cajera automática?
b. ¿Cuál es el promedio de tiempo que un cliente invierte con la cajera automática (tanto en espera del servicio como recibiéndolo)?
c. En promedio, ¿cuántos clientes se encuentran esperando en la línea para que la cajera automática los atienda?

---

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente se le atienda de inmediato, a su llegada, en la cajera automática?

λ = 5 clientes por hora

μ = 10 clientes por hora

Para ser atendido de inmediato, es necesario que el sistema esté desocupado; en un M/M/1 esta probabilidad es (1 – ρ):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{10} = 0.5$$

(1 – ρ) = 0.5

La probabilidad de que un cliente se le atienda de inmediato es 0.5.

b. ¿Cuál es el promedio de tiempo que un cliente invierte con el cajero automático (tanto en espera del servicio como recibiéndolo)?

L = 1 , W = 1/5 = 0.2 horas = 12 minutos

El tiempo promedio que in cliente invierte en la cajera automática es de 12 minutos.

c. En promedio, ¿cuántos clientes se encuentran esperando en la línea para que la cajera automática los atienda?

$$L_q = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - 1/2} = \frac{1}{2}$$

En promedio, se encuentran 0.5 clientes esperando en la línea para que ser atendidos.

4.11 Operación de taquillas

Un autocinema tiene tres taquillas, cada una de las cuales atiende una sola fila de clientes. Los automóviles llegan al autocinema a una tasa total de 90 automóviles por hora y cada taquilla puede atender a 40 automóviles por hora. Tanto las llegadas como los servicios son por completo aleatorios. Con base en esta información responda las siguientes preguntas:

a. ¿Qué tipo de situación de líneas de espera es ésta?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que, si consideramos una sola de las taquillas, se encuentre desocupada? ¿cuál es la probabilidad de que esté atendiendo a tres automóviles o haya tres automóviles esperando en la fila?
c. ¿Cuál es el número promedio de automóviles en el sistema de líneas de espera de cada una de las taquillas (esperando y siendo atendidos)?
d. ¿Cuál es el tiempo promedio que un automóvil espera *antes* de llegar a la taquilla?

---

a. Son tres sistemas M/M/1

b. ¿Cuál es la probabilidad de que, si consideramos una sola de las taquillas, se encuentre desocupada? ¿cuál es la probabilidad de que esté atendiendo a tres automóviles o haya tres automóviles esperando en la fila?

λ = 30 autos por hora

μ = 40 autos por hora

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{3}{4} = 0.25$$

$$P_n = (P_0)(\rho)^n = (0.25)(0.75)^3 = 0.1054$$

La probabilidad de que una taquilla se encuentre desocupada es de 0.25 y la probabilidad de que haya tres automóviles siendo atendidos o esperando en la fila es de 0.1054.

c. ¿Cuál es el número promedio de automóviles en el sistema de líneas de espera de cada una de las taquillas (esperando y siendo atendidos)?

$$L_q = \frac{(0.75)^2}{1-0.75} = 9/4 \qquad L = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

3 automóviles

d. ¿Cuál es el tiempo promedio que un automóvil espera *antes* de llegar a la taquilla?

$$W_q = \frac{30}{40(40-30)} = \frac{3}{40}\,de\ hora = \mathbf{4.5\ minutos}$$

Tabla 4.2 Valores de P_0

ρ	S						
	1	2	3	4	5	6	7
0.1	0.9	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048
0.2	0.8	0.8182	0.8187	0.8187	0.8187	0.8187	0.8187
0.3	0.7	0.7391	0.7407	0.7408	0.7408	0.7408	0.7408
0.4	0.6	0.6667	0.6701	0.6703	0.6703	0.6703	0.6703
0.5	0.5	0.6	0.6061	0.6065	0.6065	0.6065	0.6065
0.6	0.4	0.5385	0.5479	0.5487	0.5488	0.5488	0.5488
0.7	0.3	0.4815	0.4952	0.4955	0.4966	0.4966	0.4966
0.8	0.2	0.4286	0.4472	0.4491	0.4493	0.4493	0.4493
0.9	0.1	0.3793	0.4035	0.4062	0.4065	0.4066	0.4066
1		0.3333	0.3636	0.3673	0.3678	0.3679	0.3679
1.1		0.2903	0.3273	0.3321	0.3328	0.3329	0.3329
1.2		0.25	0.2941	0.3002	0.3011	0.3012	0.3012
1.3		0.2121	0.2638	0.2712	0.2723	0.2725	0.2725
1.4		0.1765	0.236	0.2449	0.2463	0.2466	0.2466
1.5		0.1429	0.2105	0.221	0.2228	0.2231	0.2231
1.6		0.112	0.1881	0.2003	0.2024	0.2018	0.2018
1.7		0.0811	0.1657	0.1796	0.1821	0.1826	0.1827
1.8		0.0526	0.146	0.1616	0.1646	0.1652	0.1653
1.9		0.0256	0.1278	0.1453	0.1487	0.1494	0.1495
2			0.1111	0.1304	0.1343	0.1351	0.1353
2.1			0.0957	0.1169	0.1213	0.1222	0.1224
2.2			0.0815	0.1046	0.1094	0.1105	0.1107
2.3			0.0683	0.0933	0.0987	0.0999	0.1002
2.4			0.0562	0.0831	0.0889	0.0903	0.0906
2.5			0.0449	0.0757	0.0801	0.0816	0.082
2.6			0.0345	0.0651	0.0721	0.0737	0.0742
2.7			0.0249	0.0573	0.0648	0.0666	0.0671
2.8			0.016	0.0502	0.0581	0.0601	0.0606
2.9			0.0077	0.0437	0.0521	0.0543	0.0548
3				0.0377	0.0466	0.047	0.0496
3.1				0.0323	0.0417	0.0444	0.0448
3.2				0.0273	0.0371	0.0398	0.0405
3.3				0.0227	0.033	0.0358	0.0366
3.4				0.0186	0.0293	0.0322	0.0331
3.5				0.0148	0.0259	0.029	0.0298
3.6				0.0113	0.0228	0.026	0.0269
3.7				0.0081	0.02	0.0233	0.0243
3.8				0.0051	0.0174	0.0209	0.0219
3.9				0.0025	0.0151	0.0187	0.0198
4					0.013	0.0167	0.0178
4.1					0.012	0.0149	0.016
4.2					0.0093	0.0132	0.0144
4.3					0.0077	0.0117	0.013
4.4					0.0063	0.0104	0.0117
4.5					0.005	0.0091	0.0105
4.6					0.0038	0.008	0.0094
4.7					0.0027	0.007	0.0084
4.8					0.0017	0.0061	0.0075
4.9					0.0008	0.0053	0.0067
5						0.0045	0.006

Tabla 4.3 Áreas bajo la curva normal estándar entre 0 y z

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{z^2}/2$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.004	0.008	0.012	0.016	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.091	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.148	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.17	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.195	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.219	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.258	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.291	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.334	0.3365	0.3389
1	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.377	0.379	0.381	0.383
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.398	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.437	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.475	0.4756	0.4761	0.4767
2	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.483	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.485	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.489
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.492	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.494	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.496	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.497	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.498	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.499	0.499
3.1	0.499	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

Tabla 4.4 Áreas bajo la curva χ^2

p = probabilidad de exceder un valor dado de χ^2
v= grados de libertad

v \ P	0.99	0.95	0.9	0.5	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
1	0.0002	0.004	0.016	0.455	1.642	2.71	3.84	5.41	6.64
2	0.02	0.103	0.211	1.39	3.22	4.61	5.99	7.82	9.21
3	0.115	0.35	0.584	2.37	4.64	6.25	7.82	9.84	11.34
4	0.3	0.71	1.06	3.36	5.99	7.78	9.49	11.67	13.28
5	0.55	1.14	1.61	4.35	7.29	9.24	11.07	13.39	15.09
6	0.87	1.64	2.2	5.35	8.56	10.64	12.59	15.08	16.81
7	1.24	2.17	2.83	6.35	9.8	12.02	14.07	16.62	18.48
8	1.65	2.73	3.49	7.34	11.03	13.36	15.51	18.17	20.09
9	2.09	3.32	4.17	8.34	12.24	14.68	16.92	19.68	21.67
10	2.56	3.94	4.87	9.34	13.44	15.99	18.31	21.16	23.21
11	3.05	4.58	5.58	10.34	14.63	17.28	19.68	22.62	24.72
12	3.57	5.23	6.3	11.34	15.81	18.55	21.03	24.05	26.22
13	4.11	5.89	7.04	12.34	16.98	19.81	22.36	25.47	27.69
14	4.66	6.57	7.79	13.34	18.15	21.06	23.68	26.87	29.14
15	5.23	7.26	8.55	14.34	19.31	22.31	25	28.26	30.58
16	5.81	7.96	9.31	15.34	20.46	23.54	26.3	29.63	32
17	6.41	8.67	10.08	16.34	21.62	24.77	17.59	31	33.41
18	7.02	9.39	10.86	17.34	22.76	25.99	28.87	32.35	34.8
19	7.63	10.12	11.65	18.34	23.9	27.2	30.14	33.69	36.19
20	8.26	10.85	12.44	19.34	25.04	28.41	31.41	35.02	37.57
21	8.9	11.59	13.24	20.34	26.17	29.62	32.67	36.34	38.93
22	9.54	12.34	14.04	21.34	27.3	30.81	33.92	37.66	40.29
23	10.2	13.09	14.85	22.34	28.43	32.01	35.17	38.97	41.64
24	10.86	13.85	15.66	23.34	29.55	33.2	35.42	40.27	42.98
25	11.52	14.61	16.47	24.34	30.68	34.38	37.65	41.57	44.31
26	12.2	15.38	17.29	25.34	31.8	35.56	38.88	42.86	45.64
27	12.88	16.15	18.11	26.34	32.91	36.74	40.11	44.14	46.96
28	13.56	16.93	18.94	27.34	34.03	37.92	41.34	45.52	48.28
29	14.26	17.71	19.77	28.34	35.14	39.09	42.56	46.69	49.59
30	14.95	18.49	20.6	29.34	36.25	40.26	43.77	47.96	50.89

5 SIMULACIÓN Y MÉTODOS DE MONTECARLO

Es gracias al gran avance de la tecnología en estos tiempos, que la simulación se ha vuelto una herramienta muy utilizada en el análisis y estudio de sistemas complejos.

Se puede definir como la técnica que imita el funcionamiento de un sistema del mundo real cuando evoluciona en el tiempo. Esto se hace, por lo general, al crear un modelo de simulación. Un modelo de simulación comúnmente, toma la forma de un conjunto de hipótesis acerca del funcionamiento del sistema, expresado como relaciones matemáticas o lógicas entre los objetos de interés del sistema.

El empleo de los métodos de Montecarlo en materia de investigación, proviene del trabajo realizado en el desarrollo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial en el Laboratorio Nacional de Los Álamos en EE. UU. Dicho trabajo condujo a la simulación de problemas probabilísticos de hidrodinámica concernientes a la difusión de neutrones en el material de fisión. En la actualidad es parte fundamental de los algoritmos de Raytracing para la generación de imágenes 3D. El método es aplicable a cualquier tipo de problema, ya sea estocástico o deterministico.

Haciendo una reseña histórica es importante destacar a John von Neumann[4] y Stanislaw Ulam[5] quienes refinaron esta ruleta rusa y los métodos de división de tareas. Sin embargo, el desarrollo sistemático de estas ideas tuvo que esperar al trabajo de Herman Kahn[6] en 1948.

La invención del método de Montecarlo se atribuye a Stanislaw Ulam y a John von Neumann. Se debe hacer notar que la simulación no es una técnica de optimización. Se emplea con más frecuencia para analizar preguntas tipo ¿qué sucede sí...? es posible optimizar con la simulación, pero, en general, es un proceso tardado. También, la simulación puede ser costosa. Sin embargo, con

---

[4] John Von Neumann, (1903-1957), matemático húngaro-estadounidense que realizó contribuciones importantes en física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, ciencias de la computación, economía, análisis numérico, estadística y muchos otros campos. Está considerado como uno de los más importantes matemáticos de la historia moderna.

[5] Stanislaw Ulam, (1909-1984), matemático polaco–estadounidense que participó en el proyecto Manhattan y propuso el diseño Teller–Ulam de las armas termonucleares. Conocido por ser coautor del Método de Montecarlo.

[6] Herman Kahn, (1922-1983), militar estratega estadounidense y teórico de los sistemas. Fue conocido por el análisis de las probables consecuencias de la guerra nuclear y recomendar formas de mejorar la supervivencia. Sus teorías contribuyeron al desarrollo de la estrategia nuclear de los Estados Unidos.

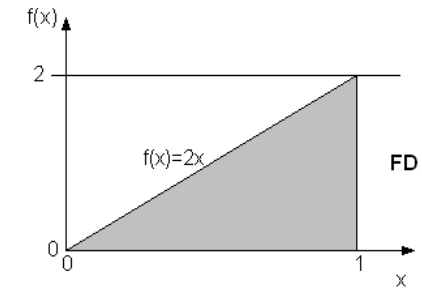
la creación de lenguajes especiales para simulación, costos decrecientes de cómputo y avances en metodología de simulación, el problema del costo se hace cada vez menos importante.

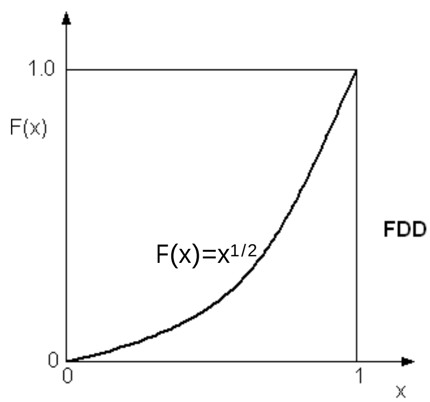
5.1 Observaciones Aleatorias

Suponer que se necesitan observaciones aleatorias a partir de una distribución triangular cuya función densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ de otra manera} \end{cases}$$

La distribución tiene la forma:





Integrando la función densidad en el intervalo de 0 a x, se tiene una expresión en x; sustituyendo a F(x) por el decimal aleatorio r, se tiene una expresión en función de r, con la cual se obtienen muestras aleatorias en la función de distribución:

$$F(x) = \int_0^x 2x\,dx = 2\int_0^x x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x = \left[x^2\right]_0^x = x^2$$

$$r = x^2$$

$$x = \sqrt{r}$$

5.2 Selección del número de muelles

Una compañía siderúrgica, que opera su propia flota de barcos para importar mineral de hierro, está considerando la construcción de facilidades portuarias para sostener una nueva planta. Se debe decidir tanto el número de lugares de descarga como el tipo de instalación en cada uno, con la idea de hacer mínimos los costos totales de descarga.

Se puede construir un máximo de tres lugares de descarga; y se requiere que cada uno de dichos lugares que se construya tenga el mismo tipo de instalación entre el tipo A, el B y el C, para los cuales se dispone de la siguiente información:

Tipo de instalación	Costo fijo por día	Costo de operación por día	Capacidad: tonelaje medio descargado por día de operación
A	$840	$840	3,600 ton
B	1,350	1,350	5,800 ton
C	1,500	1,600	6,400 ton

Los costos fijos incluyen elementos tales como la amortización del costo original de la instalación a lo largo de su vida esperada, mantenimiento general, etc.; se aplican estos costos a todos los días, bien sea que se use o no el equipo. Se incurre en los costos de operación únicamente durante los intervalos de tiempo en que el equipo de descarga está realmente en uso.

Cada uno de los barcos que va a descargarse trae 8,000 toneladas de mineral, y se considera que llegan según una distribución de Poisson durante todo el año con una tasa media de llegada de cinco barcos por semana. Los tiempos de servicio para un tipo dado de instalación se considera que son exponenciales, con una tasa media de servicio que corresponde a la columna de capacidad media en la tabla.

Si el tiempo invertido en el sistema de descarga (tiempo de espera más tiempo de descarga) se considera que le cuesta a la compañía $2,000 por barco por día, ¿qué tipo de instalación de descarga debe seleccionarse, y que tantos lugares deben construirse?

Existen 9 alternativas posibles, de las cuales todas son factibles a excepción de la alternativa (A, 1), esto es, un muelle con instalación A, en la que la tasa media de llegadas λ es 5 barcos por semana/7 días = 0.7143 barcos por día y la tasa media de servicio μ es 3,600/8,000 = 0.45 barcos por día, de manera que la cola se haría enorme, ya que sería mayor el número de unidades que llegan que el número de unidades atendidas (factor de utilización ρ, > 1) por lo que esta alternativa se puede eliminar:

Tipo de Instalación	Número de muelles		
	1	2	3
A		M/M/2	M/M/3
B	M/M/1	M/M/2	M/M/3
C	M/M/1	M/M/2	M/M/3

Alternativas factibles

Criterio de decisión: seleccionar la alternativa que genere el menor costo total, el cual se integrará con:

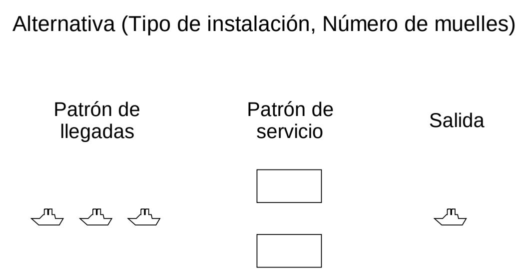
Costo fijo + Costo de espera + Costo de operación = Costo total

Parámetros del sistema:

Tasa de llegadas, λ = 0.7143 barcos por día

Tasa de servicio, μ_A = 0.450 barcos por día, μ_B = 0.725 barcos por día, μ_C = 0.800 barcos por día

Modelo de simulación:



Simulación del tiempo entre llegadas (Poisson): $x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r$

Donde *r* es un decimal aleatorio y λ es la tasa de llegadas.

Simulación del tiempo de servicio (Exponencial): $x_i = -\frac{1}{\mu} \ln r$

Donde *r* es un decimal aleatorio y μ es la tasa de servicio.

ALT (A, 2) λ = 0.7143 μ = 0.450

Aleatorio	T entre lleg	Día llega	Espera	Día entra serv	Aleatorio	T de serv	Muelle	Día sale
0.65551	0.59128	0.59128	x	0.59128	0.01825	8.89685	1	9.48813
0.54442	0.85125	1.44253		1.44253	0.20811	3.48824	2	4.93077
0.73431	0.43236	1.87489	3.05588	4.93077	0.37300	2.19152	2	7.12229
0.99808	0.00269	1.87759	5.24470	7.12229	0.42073	1.92393	2	9.04622
0.99487	0.00720	1.88479	7.16143	9.04622	0.03858	7.23364	2	16.27986
0.23160	2.04781	3.93260	5.55554	9.48813	0.31230	2.58623	1	12.07436
0.69411	0.51117	4.44377	7.63060	12.07436	0.36796	2.22172	1	14.29609
0.31581	1.61368	6.05745	8.23864	14.29609	0.78228	0.54565	1	14.84173
0.29814	1.69429	7.75174	7.09000	14.84173	0.96908	0.06978	1	14.91152
0.90768	0.13561	7.88734	7.02418	14.91152	0.91671	0.19324	1	15.10476
0.87747	0.18300	8.07034	7.03442	15.10476	0.14457	4.29781	1	19.40257
0.05679	4.01563	12.08597	4.19388	16.27986	0.19437	3.63995	2	19.91981
0.61342	0.68418	12.77016	6.63242	19.40257	0.99741	0.00577	1	19.40834
0.01349	6.02821	18.79837	0.60997	19.40834	0.68709	0.83396	1	20.24231
0.32224	1.58542	20.38379	x	20.38379	0.48357	1.61459	1	21.99839
0.19523	2.28703	22.67082	x	22.67082	0.78549	0.53656	2	23.20738
0.40303	1.27225	23.94307	x	23.94307	0.19367	3.64799	1	27.59106
0.96759	0.04613	23.98920	x	23.98920	0.48122	1.62542	2	25.61462
0.11542	3.02284	27.01204	x	27.01204	0.14386	4.30863	2	31.32067
0.39570	1.29793	28.30996	x	28.30996	0.73742	0.67689	1	28.98685
			69.47165			50.53838		

T simulación	31.32067
CF =	52618.72
CE =	240020.06
CO =	42452.24
	335091.02
CT/DÍA =	**10698.72**

ALT (A, 3) λ = 0.7143 μ = 0.450

Aleatorio	T entre lleg	Día llega	Espera	Día entra serv	Aleatorio	T de serv	Muelle	Día sale
0.81292	0.28997	0.28997	x	0.28997	0.97678	0.05222	1	0.34219
0.64217	0.62006	0.91003	x	0.91003	0.70000	0.79260	2	1.70263
0.28959	1.73500	2.64504	x	2.64504	0.95547	0.10122	3	2.74625
0.98166	0.02592	2.67095	x	2.67095	0.34886	2.34020	1	5.01116
0.85864	0.21337	2.88432	x	2.88432	0.14902	4.23036	2	7.11468
0.35719	1.44129	4.32561	x	4.32561	0.37873	2.15760	3	6.48321
0.22324	2.09929	6.42490	x	6.42490	0.92074	0.18350	1	6.60840
0.75967	0.38483	6.80973	x	6.80973	0.07532	5.74669	3	12.55642
0.25159	1.93191	8.74164	x	8.74164	0.99103	0.02003	1	8.76167
0.55348	0.82813	9.56977	x	9.56977	0.26765	2.92908	2	12.49885
0.18952	2.32857	11.89834	x	11.89834	0.92361	0.17658	1	12.07492
0.64382	0.61647	12.51481	x	12.51481	0.95175	0.10989	1	12.62471
0.41469	1.23233	13.74714	x	13.74714	0.98825	0.02626	2	13.77340
0.51271	0.93526	14.68240	x	14.68240	0.30680	2.62567	3	17.30807
0.01285	6.09636	20.77876	x	20.77876	0.55702	1.30033	1	22.07909
0.65587	0.59050	21.36926	x	21.36926	0.51042	1.49448	2	22.86375
0.95776	0.06042	21.42968	x	21.42968	0.68981	0.82520	3	22.25488
0.45082	1.11536	22.54505	x	22.54505	0.25858	3.00564	1	25.55068
0.17554	2.43582	24.98087	x	24.98087	0.06552	6.05633	2	31.03720
0.98819	0.01663	24.99750	x	24.99750	0.39720	2.05182	3	27.04932
			0.00000			36.22568		

T simulación	31.03720
CF =	78213.74
CE =	72451.37
CO =	30429.57
	181094.68
CT/DÍA =	**5834.76**

ALT (B, 1) λ = 0.7143 μ = 0.725

Aleatorio	T entre lleg	Día llega	Espera	Día entra serv	Aleatorio	T de serv	Muelle	Día sale
0.65551	0.59128	0.59128	x	0.59128	0.01825	5.52135		6.11263
0.99808	0.00269	0.59398	5.51865	5.51865	0.42073	1.19398		6.71263
0.69411	0.51117	1.10515	5.60749	6.71263	0.36796	1.37879		8.09142
0.90768	0.13561	1.24075	6.85067	8.09142	0.91671	0.11992		8.21135
0.61342	0.68418	1.92494	6.28641	8.21135	0.99741	0.00358		8.21493
0.19523	2.28703	4.21197	4.00296	8.21493	0.78549	0.33299		8.54792
0.11542	3.02284	7.23480	1.31312	8.54792	0.14386	2.67392		11.22184
0.62310	0.66228	7.89708	3.32476	11.22184	0.97778	0.03099		11.25282
0.75503	0.39340	8.29048	2.96234	11.25282	0.49388	0.97290		12.22572
0.33647	1.52496	9.81544	2.41028	12.22572	0.99103	0.01243		12.23815
0.44182	1.14361	10.95904	1.27911	12.23815	0.55239	0.81851		13.05666
0.94836	0.07423	11.03327	2.02339	13.05666	0.48970	0.98463		14.04129
0.53774	0.86854	11.90181	1.15485	13.05666	0.22535	2.05501		15.11167
0.89181	0.16030	12.06211	3.04956	15.11167	0.12329	2.88670		17.99837
0.01892	5.55444	17.61655	0.38182	17.99837	0.20878	2.16034		20.15871
0.75881	0.38640	18.00295	2.15576	20.15871	0.38493	1.31662		21.47533
0.67107	0.55843	18.56139	2.91394	21.47533	0.27812	1.76486		23.24019
0.84408	0.23731	18.79870	4.44150	23.24019	0.85495	0.21613		23.45632
0.78634	0.33651	19.13521	x	19.13521	0.07181	3.63218		22.76739
0.61260	0.68606	19.82127	2.94611	22.76739	0.67281	0.54652		23.31391
			53.10407			28.62234		

T simulación	23.45632
CF =	31666.03
CE =	163452.82
CO =	38640.16
	233759.02
CT/DÍA =	**9965.72**

ALT (B, 2) λ = 0.7143 μ = 0.725

Aleatorio	T entre lleg	Día llega	Espera	Día entra serv	Aleatorio	T de serv	Muelle	Día sale
0.54442	0.85125	0.85125	x	0.85125	0.20811	2.16512	1	3.01636
0.99487	0.00720	0.85845	x	0.85845	0.03858	4.48985	2	5.34829
0.31581	1.61368	2.47213	0.54424	3.01636	0.78228	0.33868	1	3.35504
0.87747	0.18300	2.65513	0.69992	3.35504	0.14457	2.66761	1	6.02265
0.01349	6.02821	8.68334	x	8.68334	0.68709	0.51763	2	9.20097
0.40303	1.27225	9.95559	x	9.95559	0.19367	2.26427	1	12.21986
0.39570	1.29793	11.25352	x	11.25352	0.73742	0.42014	2	11.67366
0.50603	0.95363	12.20715	x	12.20715	0.52275	0.89469	2	13.10184
0.84997	0.22757	12.43472	x	12.43472	0.93027	0.09970	1	12.53443
0.39494	1.30063	13.73535	x	13.73535	0.90423	0.13885	1	13.87421
0.65960	0.58258	14.31793	x	14.31793	0.52065	0.90026	2	15.21819
0.06589	3.80769	18.12562	x	18.12562	0.88058	0.17541	1	18.30103
0.63158	0.64334	18.76896	x	18.76896	0.01294	5.99647	2	24.76543
0.22431	2.09261	20.86157	x	20.86157	0.87399	0.18578	1	21.04735
0.30436	1.66536	22.52693	x	22.52693	0.41227	1.22216	1	23.74909
0.08374	3.47201	25.99893	x	25.99893	0.66527	0.56215	2	26.56108
0.45473	1.10328	27.10222	x	27.10222	0.57942	0.75272	1	27.85494
0.01019	6.42045	33.52267	x	33.52267	0.33567	1.50568	2	35.02835
0.12186	2.94683	36.46950	x	36.46950	0.03293	4.70812	1	41.17762
0.48100	1.02464	37.49414	x	37.49414	0.26518	1.83085	2	39.32498
			1.24416			31.83612		

T simulación	41.17762
CF =	111179.57
CE =	66160.56
CO =	42978.77
	220318.90
CT/DÍA =	**5350.45**

ALT (B, 3) λ = 0.7143 μ = 0.725

Aleatorio	T entre lleg	Día llega	Espera	Día entra serv	Aleatorio	T de serv	Muelle	Día sale
0.73431	0.43236	0.43236	x	0.43236	0.37300	1.36025	1	1.79262
0.23160	2.04781	2.48017	x	2.48017	0.31230	1.60525	2	4.08542
0.29814	1.69429	4.17446	x	4.17446	0.96908	0.04331	3	4.21778
0.05679	4.01563	8.19009	x	8.19009	0.19437	2.25928	1	10.44938
0.32224	1.58542	9.77552	x	9.77552	0.48357	1.00216	2	10.77768
0.96759	0.04613	9.82164	x	9.82164	0.48122	1.00888	3	10.83052
0.59423	0.72869	10.55034	x	10.55034	0.35817	1.41622	1	11.96656
0.03299	4.77615	15.32649	x	15.32649	0.22666	2.04731	2	17.37379
0.14368	2.71622	18.04271	x	18.04271	0.94082	0.08414	3	18.12684
0.24189	1.98698	20.02969	x	20.02969	0.04593	4.24914	1	24.27883
0.39085	1.31520	21.34489	x	21.34489	0.91565	0.12155	2	21.46644
0.87457	0.18763	21.53253	x	21.53253	0.87490	0.18433	3	21.71686
0.54677	0.84522	22.37774	x	22.37774	0.97736	0.03159	2	22.40934
0.54872	0.84023	23.21797	x	23.21797	0.70763	0.47701	3	23.69498
0.23414	2.03258	25.25055	x	25.25055	0.84313	0.23535	2	25.48590
0.15772	2.58571	27.83626	x	27.83626	0.65642	0.58062	1	28.41689
0.79788	0.31612	28.15239	x	28.15239	0.19651	2.24420	3	30.39659
0.42039	1.21319	29.36558	x	29.36558	0.17780	2.38219	2	31.74777
0.27369	1.81406	31.17964	x	31.17964	0.65645	0.58056	1	31.76020
0.26060	1.88269	33.06233	x	33.06233	0.80807	0.29394	2	33.35627
			0.00000			22.20730		

T simulación	33.35627
CF =	135092.91
CE =	44414.60
CO =	29979.86
	209487.37
CT/DÍA =	**6280.30**

ALT (C, 1) λ = 0.7143 μ = 0.800

Aleatorio	T entre lleg	Día llega	Espera	Día entra serv	Aleatorio	T de serv	Muelle	Día sale
0.68749	0.52459	0.52459	x	0.52459	0.34788	1.31987		1.84446
0.21558	2.14817	2.67276	x	2.67276	0.38160	1.20422		3.87698
0.59999	0.71517	3.38793	0.48905	3.87698	0.75268	0.35515		4.23213
0.05319	4.10734	7.49527	x	7.49527	0.09946	2.88500		10.38028
0.33885	1.51509	9.01036	1.36991	10.38028	0.00525	6.56210		16.94238
0.36546	1.40924	10.41961	6.52278	16.94238	0.66628	0.50756		17.44994
0.07746	3.58126	14.00087	3.44907	17.44994	0.69839	0.44873		17.89867
0.58412	0.75270	14.75357	3.14510	17.89867	0.01294	5.43430		23.33297
0.42091	1.21147	15.96503	7.36794	23.33297	0.82488	0.24064		23.57361
0.09131	3.35087	19.31591	4.25771	23.57361	0.10193	2.85431		26.42792
0.70952	0.48042	19.79633	6.63160	26.42792	0.74209	0.37286		26.80078
0.78597	0.33716	20.13349	6.66729	26.80078	0.10321	2.83869		29.63948
0.09015	3.36877	23.50226	6.13722	29.63948	0.83316	0.22817		29.86765
0.21442	2.15573	25.65799	4.20966	29.86765	0.87725	0.16370		30.03134
0.07361	3.65255	29.31054	0.72081	30.03134	0.70977	0.42852		30.45986
0.23444	2.03076	31.34130	x	31.34130	0.85800	0.19144		31.53274
0.79727	0.31719	31.65849	x	31.65849	0.29930	1.50791		33.16640
0.68117	0.53751	32.19601	0.97039	33.16640	0.93039	0.09019		33.25659
0.71133	0.47688	32.67288	0.58371	33.25659	0.66060	0.51825		33.77484
0.00348	7.92537	40.59825	x	40.59825	0.39540	1.15983		41.75808
			52.52221			29.31145		

T simulación	41.75808
CF =	62637.12
CE =	163667.32
CO =	46898.31
	273202.75
CT/DÍA =	**6542.51**

ALT (C, 2) λ = 0.7143 μ = 0.800

Aleatorio	T entre lleg	Día llega	Espera	Día entra serv	Aleatorio	T de serv	Muelle	Día sale
0.00848	6.67738	6.67738	x	6.67738	0.26868	1.64277	1	8.32015
0.07160	3.69139	10.36877	x	10.36877	0.53069	0.79198	2	11.16075
0.91220	0.12866	10.49743	x	10.49743	0.56868	0.70554	1	11.20297
0.47429	1.04432	11.54175	x	11.54175	0.91000	0.11789	2	11.65963
0.57289	0.77988	12.32162	x	12.32162	0.85257	0.19938	1	12.52101
0.54237	0.85652	13.17814	x	13.17814	0.56236	0.71951	2	13.89765
0.37413	1.37643	14.55457	x	14.55457	0.98486	0.01907	1	14.57363
0.30485	1.66311	16.21768	x	16.21768	0.43547	1.03917	2	17.25684
0.41295	1.23821	17.45589	x	17.45589	0.94739	0.06756	1	17.52345
0.04791	4.25368	21.70958	x	21.70958	0.65087	0.53681	1	22.24639
0.98227	0.02505	21.73462	x	21.73462	0.26728	1.64932	2	23.38394
0.16141	2.55331	24.28793	x	24.28793	0.83923	0.21909	1	24.50702
0.96115	0.05547	24.34341	x	24.34341	0.72073	0.40937	2	24.75278
0.06552	3.81549	28.15890	x	28.15890	0.23554	1.80733	1	29.96623
0.58257	0.75643	28.91533	x	28.91533	0.90524	0.12444	2	29.03978
0.93628	0.09218	29.00751	0.03226	29.00751	0.37779	1.21678	2	30.22429
0.54640	0.84616	29.85367	0.37062	29.85367	0.77548	0.31785	1	30.17152
0.44850	1.12259	30.97626	x	30.97626	0.75259	0.35530	1	31.33156
0.94705	0.07616	31.05242	x	31.05242	0.73525	0.38443	2	31.43685
0.25529	1.91151	32.96393	x	32.96393	0.23222	1.82511	1	34.78904
			0.40288			14.14869		

T simulación	34.78904
CF =	104367.13
CE =	29103.15
CO =	22637.91
	156108.19

CT/DÍA = 4487.28

ALT (C, 3) λ = 0.7143 μ = 0.800

Aleatorio	T entre lleg	Día llega	Espera	Día entra serv	Aleatorio	T de serv	Muelle	Día sale
0.75945	0.38522	0.38522	x	0.38522	0.98050	0.02462	1	0.40984
0.78643	0.33635	0.72157	x	0.72157	0.95981	0.05128	2	0.77285
0.73064	0.43936	1.16093	x	1.16093	0.74053	0.37548	3	1.53641
0.11905	2.97946	4.14039	x	4.14039	0.85299	0.19876	1	4.33915
0.51671	0.92439	5.06478	x	5.06478	0.16272	2.26962	2	7.33440
0.10575	3.14539	8.21017	x	8.21017	0.52034	0.81659	3	9.02676
0.97864	0.03023	8.24041	x	8.24041	0.80029	0.27848	1	8.51889
0.29957	1.68757	9.92798	x	9.92798	0.61480	0.60808	2	10.53606
0.85214	0.22401	10.15199	x	10.15199	0.90258	0.12812	3	10.28010
0.89593	0.15385	10.30583	x	10.30583	0.36970	1.24383	1	11.54966
0.83834	0.24686	10.55269	x	10.55269	0.01810	5.01498	3	15.56767
0.10181	3.19851	13.75120	x	13.75120	0.36689	1.25335	2	15.00456
0.86828	0.19773	13.94894	x	13.94894	0.07593	3.22243	1	17.17136
0.22541	2.08577	16.03471	x	16.03471	0.14228	2.43747	2	18.47218
0.76003	0.38415	16.41886	x	16.41886	0.28932	1.55030	3	17.96915
0.95526	0.06408	16.48294	0.68843	17.17136	0.22349	1.87300	1	19.04437
0.98712	0.01815	16.50108	1.46807	17.96915	0.72546	0.40119	3	18.37035
0.79763	0.31655	16.81764	1.55271	18.37035	0.69268	0.45899	3	18.82933
0.77709	0.35307	17.17071	1.30147	18.47218	0.88491	0.15283	2	18.62501
0.14090	2.74355	19.91426	x	19.91426	0.86859	0.17611	2	20.09037
			5.01068			22.53550		

T simulación	20.09037
CF =	90406.65
CE =	55092.35
CO =	36056.80
	181555.80

CT/DÍA = 9036.96

Resumen de costo total:

Tipo de Instalación	Número de muelles		
	1	2	3
A		10968.72	5834.76
B	9965.72	5350.45	6280.3
C	6542.51	**4478.28**	9036.96

Comparando con los costos determinados con línea de espera:

Tipo de Instalación	Número de muelles		
	1	2	3
A		13899.41	7626.41
B	135684.09	6619.11	7434.96
C	19448.4	**6608.44**	7772.11

Existen diferencias entre los costos debido a que se han empleado pocos números aleatorios, muy lejos de alcanzar la ley de los grandes números; sin embargo, hay convergencia en la selección del menor costo, que también puede ser coincidencia. Esto conduce a sugerir que se utilicen 2 muelles con instalación B en cada uno de ellos.

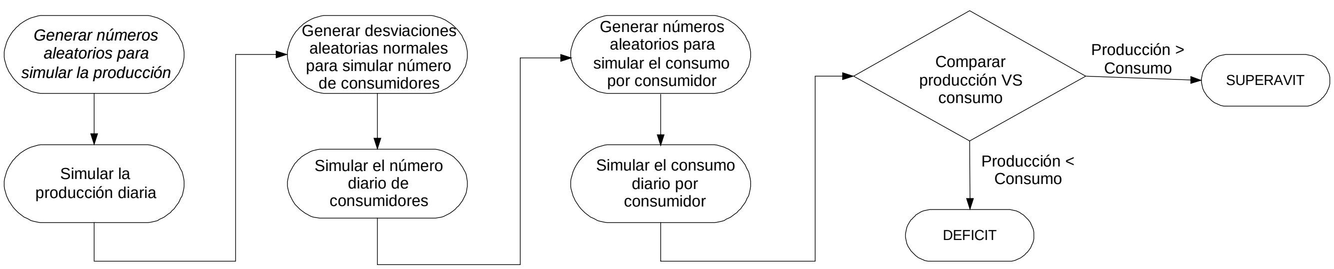
5.3 Consumo de energía

La producción diaria de un sistema hidroeléctrico en Kw-hr, obedece a una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo [10,16] kw-hr. El número diario de consumidores de energía producida tiene una distribución normal con $\mu = 7$ consumidores y una σ=2 consumidores. La probabilidad de que un consumidor requiera de 1, 2 o 3 kw-hr está dada por la siguiente distribución:

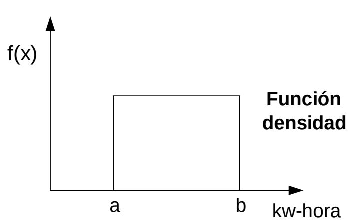
Kw-hr/consumidor	1	2	3
Probabilidad	0.45	0.35	0.20

Estimar con simulación, el número medio de kw-hr no consumidos y el número medio de kw-hr requeridos por día debido a una producción insuficiente. Suponer que la producción de un día no puede ser utilizada en el siguiente.

Modelo de simulación:



Distribución uniforme (producción):



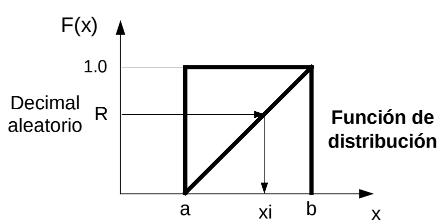
$$\frac{1}{b-a} = \frac{R}{x_i - a}$$

$$x_i - a = R(b-a)$$

$$x_i = R(b-a) + a$$

$$x_i = R(16-10) + 10$$

$$x_i = 6R + 10$$

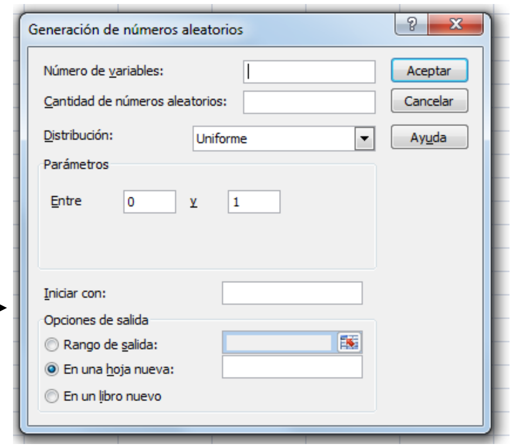


El decimal aleatorio R se genera en *Excel*®:

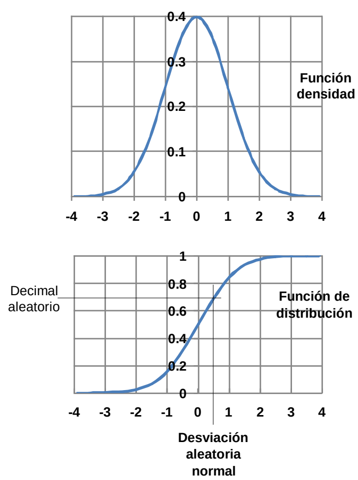
Datos ⟶ Análisis de datos

↓

Generación de números aleatorios ⟶ Aceptar ⟶



Distribución normal (número diario de consumidores):



Para generar una muestra aleatoria x_i con la distribución normal es necesario generar Distribuciones Aleatorias Normales (DAN) y luego obtener una muestra aleatoria x_i mediante la expresión:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z\sigma = x - \mu$$

$$x_i = z\sigma + \mu$$

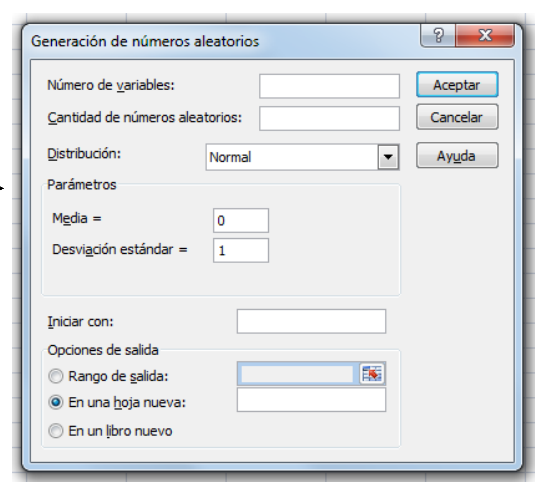
$$x_i = DAN(\sigma) + \mu$$

Una desviación aleatoria normal se genera en *Excel*:

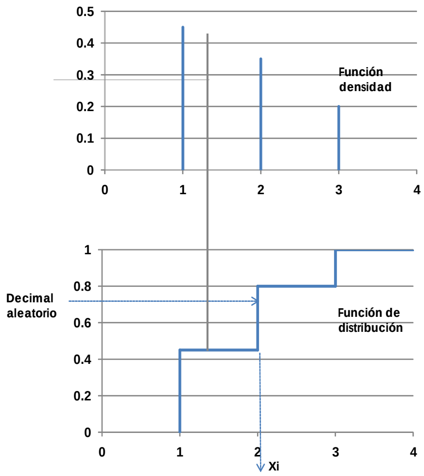
Datos ⟶ Análisis de datos

↓

Generación de números aleatorios ⟶ Aceptar ⟶



Distribución empírica (consumo por consumidor):



Cada muestra aleatoria se genera proyectando un decimal aleatorio en la función de distribución.

Resumiendo:

Producción diaria: $x_i = 6R + 10$ kw-hr

Número diario de consumidores: $x_i = DAN\ (\sigma) + \mu = 2\ DAN + 7$

Consumo diario por consumidor: para $0 \leq R \leq 0.45$, $x_i = 1$ kw-hr por consumidor

$0.45 \leq R \leq 0.8$, $x_i = 2$ kw-hr por consumidor

$0.8 \leq R \leq 1.0$, $x_i = 3$ kw-hr por consumidor

Para cada día, se simula la producción con decimal aleatorio R; con una desviación aleatoria normal (DAN) se genera el número de consumidores para ese día, cada uno de los cuales tendrá un consumo. La suma de estos consumos debe ser comparada con la cantidad producida, para finalmente determinar si ese día hubo un sobrante (superávit) o un faltante (déficit):

Simulación de cinco días de operación

Día	Aleatorio	Producción	Desviación aleatoria normal	Consumidores		Aleatorio	Consumo	Superávit	Déficit
1	0.382	12.292	0.6165169	8	1	0.832422864	3		6.708
					2	0.003936888	1		
					3	0.808404798	3		
					4	0.943174535	3		
					5	0.878566851	3		
					6	0.60155034	2		
					7	0.699972533	2		
					8	0.537583544	2		
							19		
2	0.1006	10.604	0.5946	8	1	0.98129215	3		1.396
					2	0.46501053	2		
					3	0.65086825	2		
					4	0.39265114	1		
					5	0.13782159	1		
					6	0.88482315	3		
					7	0.5142674	2		
					8	0.06109806	1		
							12		
3	0.596	13.578	-0.1847	7	1	0.83602405	3		0.4211
					2	0.35157323	1		
					3	0.85470138	3		
					4	0.54304636	2		
					5	0.34330271	1		
					6	0.47102268	2		
					7	0.62883389	2		
							14		
4	0.8991	15.3946	-0.5724	6	1	0.56126591	2	6.3946	
					2	0.57502976	2		
					3	0.14581744	1		
					4	0.30753502	1		
					5	0.56877346	2		
					6	0.93993957	3		
							9		
5	0.88460952	15.3076	0.4691878	8	1	0.97482223	3		1.6924
					2	0.65608692	2		
					3	0.25165563	1		
					4	0.50120548	2		
					5	0.27991577	1		
					6	0.95312357	3		
					7	0.63161107	2		
					8	0.82384716	3		
							17		
								6.3946	10.2175

De manera que el número medio de kw-hr no consumidos por día es de 1.278 kw-hr y el número medio de kw-hr requeridos por día debido a una producción insuficiente es de 2.043 kw-hr.

5.4 Reparaciones

Un experto en reparaciones encuentra que el tiempo que invierte en sus trabajos tiene una distribución exponencial con media de 30 minutos. Si repara los aparatos en el orden que llegan, y si la llegada de ellos es aproximadamente Poisson con una tasa media de 10 por día de 8 horas, ¿cuál es el tiempo esperado que está desocupado cada día? ¿qué tantos aparatos están por delante del que acaba de llegarle?

λ = tasa de llegadas = 10/8 = 1.25 aparatos por hora

μ = tasa de servicio = 2 aparatos por hora

x_i = Tiempo entre llegadas = $-\frac{1}{\lambda}\ln r$

x_i = Tiempo de servicio = $-\frac{1}{\mu}\ln r$

L = Número de aparatos en el sistema

L_q = Número de unidades en la cola

	Aleatorio	T entre llegadas	Hora llega	Espera	Hora entra servicio	Aleatorio	T de serv	Hora sale	Tiempo desocupado	L	Lq
1	0.65551	0.33788	0.33788	x	0.33788	0.01825	2.00179	2.33967	0.33788	1	0
2	0.54442	0.48643	0.82430	1.51537	2.33967	0.20811	0.78485	3.12452	0.00000	2	1
3	0.73431	0.24706	1.07137	2.05316	3.12452	0.37300	0.49309	3.61762	0.00000	3	2
4	0.99808	0.00154	1.07291	2.54471	3.61762	0.42073	0.43288	4.05050	0.00000	4	3
5	0.99487	0.00411	1.07702	2.97348	4.05050	0.03858	1.62757	5.67807	0.00000	5	4
6	0.23160	1.17018	2.24720	3.43087	5.67807	0.31230	0.58190	6.25997	0.00000	6	5
7	0.69411	0.29210	2.53929	3.72068	6.25997	0.36796	0.49989	6.75986	0.00000	6	5
8	0.31581	0.92210	3.46140	3.29846	6.75986	0.78228	0.12277	6.88263	0.00000	6	5
9	0.29814	0.96817	4.42956	2.45307	6.88263	0.96908	0.01570	6.89833	0.00000	5	4
10	0.90768	0.07749	4.50705	2.39128	6.89833	0.91671	0.04348	6.94181	0.00000	6	5
11	0.87747	0.10457	4.61162	2.33019	6.94181	0.14457	0.96701	7.90882	0.00000	7	6
12	0.05679	2.29465	6.90627	1.00255	7.90882	0.19437	0.81899	8.72781	0.00000	3	2
13	0.61342	0.39096	7.29723	1.43058	8.72781	0.99741	0.00130	8.72911	0.00000	3	2
14	0.01349	3.44469	10.74193	x	10.74193	0.68709	0.18764	10.92957	2.01282	1	0
15	0.32224	0.90595	11.64788	x	11.64788	0.48357	0.36328	12.01117	0.71831	1	0
16	0.19523	1.30687	12.95476	x	12.95476	0.78549	0.12073	13.07548	0.94359	1	0
17	0.40303	0.72700	13.68176	x	13.68176	0.19367	0.82080	14.50255	0.60627	1	0
18	0.96759	0.02636	13.70811	0.79444	14.50255	0.48122	0.36572	14.86827	0.00000	2	1
19	0.11542	1.72734	15.43545	x	15.43545	0.14386	0.96944	16.40489	0.56717	1	0
20	0.39570	0.74167	16.17712	0.22777	16.40489	0.73742	0.15230	16.55719	0.00000	2	1
									5.18604		**46**

Tiempo de simulación =16.55719 horas

Tiempo desocupado por hora = 5.18604/16.55719 = 0.3132 horas

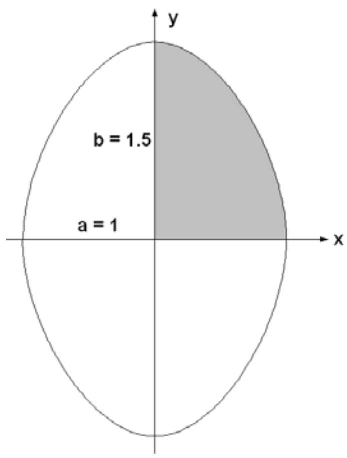
Tiempo desocupado por día = 0.3132 x 8 = 2.5 horas por día de 8 horas

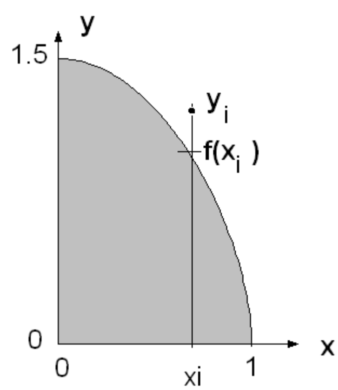
L_q = 46/20 = 2.3 aparatos delante del que acaba de llegar

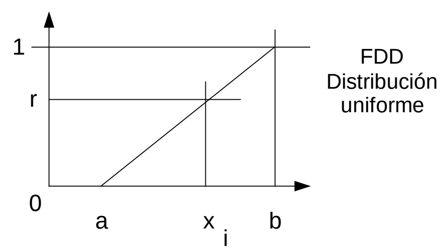
5.5 Área de una Elipse

Calcular con simulación, el área de un cuarto de elipse con valores de radio menor = 1 (a = 1) y de radio mayor = 1.5 (b = 1.5)

El área buscada es el área sombreada que se muestra:







De la función de distribución uniforme, se puede deducir una expresión para generar una x_i aleatoria en el intervalo de *a* a *b*: utilizando triángulos semejantes:

$$\frac{1}{(b-a)} = \frac{r}{x_i - a} \; ; \;\; x_i - a = r(b-a)$$

Por lo que resulta que:

$$x_i = r(b-a) + a$$

La ecuación de la elipse con a = 1 y b = 1.5 es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2.25} = 1$$

$$y^2 = 2.25 - 2.25x^2$$

El método consiste en simular que se impacta a un área rectangular conocida, y ese impacto puede acertar o no al área que se busca; numéricamente consiste en simular un impacto de abscisa x_i con el cual se calcula una función $f(x_i)$, la cual se compara con una y_i aleatoria que puede ser mayor o menor que la f(x_i); si es menor que la f(x_i) se considera como un acierto. Se tendrá una serie de intentos, de los cuales algunos serán aciertos y otros no; se calcula la probabilidad de acertar y se multiplica por el área rectangular conocida, con lo cual se obtiene el área buscada.

	Aleatorio	x i	f(x i)	aleatorio	y i	aciertos
1	0.65551	0.65551	**1.13278**	0.01825	**0.02738**	ok
2	0.54442	0.54442	**1.25822**	0.20811	**0.31216**	ok
3	0.73431	0.73431	**1.01823**	0.37300	**0.55950**	ok
4	0.99808	0.99808	**0.09297**	0.42073	**0.63109**	
5	0.99487	0.99487	**0.15170**	0.03858	**0.05786**	ok
6	0.23160	0.23160	**1.45921**	0.31230	**0.46844**	ok
7	0.69411	0.69411	**1.07980**	0.36796	**0.55194**	ok
8	0.31581	0.31581	**1.42324**	0.78228	**1.17342**	ok
9	0.29814	0.29814	**1.43179**	0.96908	**1.45363**	
10	0.90768	0.90768	**0.62949**	0.91671	**1.37507**	
11	0.87747	0.87747	**0.71945**	0.14457	**0.21685**	ok
12	0.05679	0.05679	**1.49758**	0.19437	**0.29156**	ok
13	0.61342	0.61342	**1.18463**	0.99741	**1.49611**	
14	0.01349	0.01349	**1.49986**	0.68709	**1.03064**	ok
15	0.32224	0.32224	**1.41998**	0.48357	**0.72535**	ok
16	0.19523	0.19523	**1.47114**	0.78549	**1.17823**	ok
17	0.40303	0.40303	**1.37278**	0.19367	**0.29051**	ok
18	0.96759	0.96759	**0.37879**	0.48122	**0.72182**	
19	0.11542	0.11542	**1.48997**	0.14386	**0.21580**	ok
20	0.39570	0.39570	**1.37757**	0.73742	**1.10613**	ok
						15

La probabilidad de acertar es, Pa = 15/20 = 0.75

El área rectangular conocida es A_R = 1.5

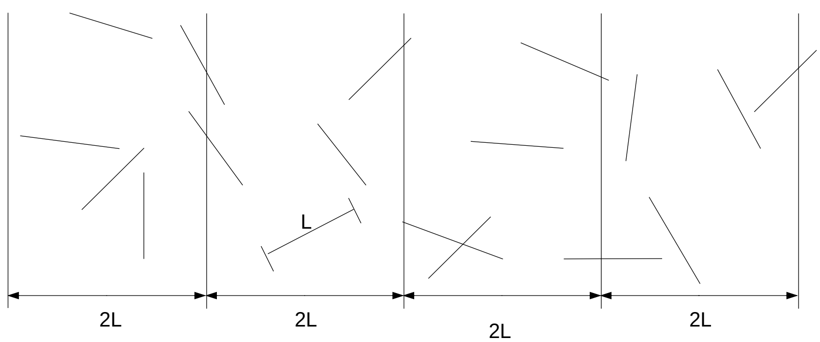
El área buscada $A_{buscada}$ = (1.5)(0.75) = 1.125 U^2

Si se calcula el área real, A = π ab/4 = 3.1416 (1) (1.5) / 4 = **1.1781 U^2**

5.6 Las agujas de Buffon

En 1773, Georges Buffon logró estimar el número π por medio de un experimento que consiste en tomar una aguja de longitud L, y lanzarla sobre una superficie plana en donde se tiene un conjunto de líneas paralelas separadas entre sí por una distancia 2L, como se muestra en la figura. El proceso se repite varias veces y se anota cada una de las ocasiones en que la aguja intercepta una de las líneas. Si N es el número de veces que se lanza la aguja y n es el número de aciertos logrados al cruzar una línea, entonces cuando N es un número suficientemente grande, se cumple que:

$$N \approx \pi n$$

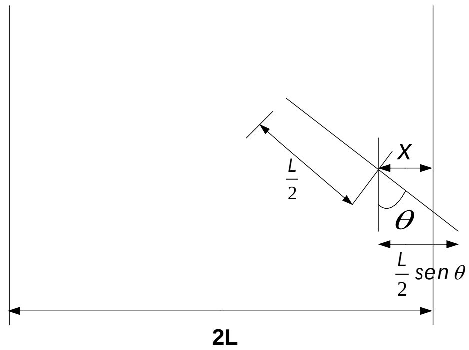


Se puede establecer que si se define a p como la probabilidad de que una aguja de longitud L lanzada al azar sobre una superficie plana, en donde se tiene un conjunto de líneas paralelas entre sí una distancia de D (con D>L), haga contacto con alguna de las líneas, entonces su valor está dado por:

$$p = \frac{2L}{\pi D}$$

El caso particular de este problema, representado por la ecuación, se obtiene cuando se hace D=2L, quedando p = 1/π. De acuerdo con la teoría de probabilidades, si N es el número de veces que se lanza la aguja y n es el número de aciertos, el cociente n/N tiende a la probabilidad p cuando N tiende a infinito, de donde al sustituir en p = 1/π se obtiene N = n π que es la relación buscada.

Para simular el proceso de lanzar la aguja, conviene considerar la figura donde se muestra una posición cualquiera que puede tomar la aguja al caer cerca de una línea. Se observa que la posibilidad de tocar la línea se puede establecer en términos de la distancia x, que existe entre el centro de la aguja y la línea más próxima, y en términos del ángulo θ que forman la aguja y la línea.



Además se puede concluir que si

$$x > \frac{L}{2} sen\,\theta$$
$$0 \le x \le \frac{L}{2}$$
$$0 \le \theta < 180°$$
$$\pi = \frac{1}{p}$$

La aguja deberá estar tocando la línea y si

$$x > \frac{L}{2} sen\,\theta$$

La aguja no toca la línea.

De la figura se observa que x y θ quedan limitados en la forma siguiente:

$$0 \le x \le \frac{L}{2}$$
$$0 \le \theta < 180°$$

Para simular el lanzamiento de la aguja se genera un número aleatorio que representa la distancia del centro de la aguja a la línea; al multiplicarlo por L/2 se obtiene x. Se genera después otro número que representa el ángulo que forman la aguja y la línea; multiplicándolo porπ se obtiene θ. Después se calcula el el valor Y = (L/2) seno θ. Si el valor de x es menor o igual al de Y se registra como un acierto, pasando después a generar otros números para simular un nuevo lanzamiento.

El proceso se repite N veces y si n es el número de aciertos, la probabilidad p estará dada aproximadamente por n/N. El valor así obtenido permite calcular el valor de π:

$$\pi = \frac{1}{p}$$

En el ejemplo siguiente se simulan 30 lanzamientos de la aguja y se supone por simpleza de cálculo, que L/2 = 1.

	Aleatorio	Centro de Aguja a línea	x	Aleatorio	Ángulo	Y (L/2)sen θ	Aciertos
1	0.58913	0.58913	0.58913	0.01825	0.05733	0.05730	
2	0.92718	0.92718	0.92718	0.20811	0.65378	0.60820	
3	0.92917	0.92917	0.92917	0.37300	1.17181	0.92145	
4	0.49742	0.49742	0.49742	0.42073	1.32176	0.96915	ok
5	0.70238	0.70238	0.70238	0.03858	0.12119	0.12089	
6	0.96139	0.96139	0.96139	0.31230	0.98111	0.83111	
7	0.25364	0.25364	0.25364	0.36796	1.15599	0.91519	ok
8	0.59627	0.59627	0.59627	0.78228	2.45761	0.63188	ok
9	0.12839	0.12839	0.12839	0.96908	3.04448	0.09696	
10	0.69726	0.69726	0.69726	0.91671	2.87995	0.25867	
11	0.45924	0.45924	0.45924	0.14457	0.45417	0.43872	
12	0.37465	0.37465	0.37465	0.19437	0.61064	0.57339	ok
13	0.70327	0.70327	0.70327	0.99741	3.13345	0.00814	
14	0.95529	0.95529	0.95529	0.68709	2.15857	0.83218	
15	0.59862	0.59862	0.59862	0.48357	1.51917	0.99867	ok
16	0.63219	0.63219	0.63219	0.78549	2.46768	0.62405	
17	0.65575	0.65575	0.65575	0.19367	0.60844	0.57158	
18	0.66683	0.66683	0.66683	0.48122	1.51179	0.99826	ok
19	0.52467	0.52467	0.52467	0.14386	0.45196	0.43673	
20	0.36915	0.36915	0.36915	0.73742	2.31667	0.73449	ok
21	0.80764	0.80764	0.80764	0.35817	1.12521	0.90236	ok
22	0.39811	0.39811	0.39811	0.97778	3.07180	0.06973	
23	0.94348	0.94348	0.94348	0.52275	1.64228	0.99745	ok
24	0.75304	0.75304	0.75304	0.22666	0.71208	0.65341	
25	0.29957	0.29957	0.29957	0.49388	1.55158	0.99982	ok
26	0.29823	0.29823	0.29823	0.93027	2.92252	0.21732	
27	0.19556	0.19556	0.19556	0.94082	2.95569	0.18483	
28	0.89941	0.89941	0.89941	0.99103	3.11341	0.02818	
29	0.87326	0.87326	0.87326	0.90423	2.84074	0.29634	
30	0.37684	0.37684	0.37684	0.04593	0.14429	0.14379	

El número de aciertos es n=10 y el número de intentos es N=30 por lo que p = 0.333 y entonces el número π = 3.

5.7 Aeropuerto

En un cierto aeropuerto se emplean exactamente 5 minutos en aterrizar un avión, una vez que se le da la señal de que puede hacerlo. Aunque los aviones que llegan tienen programado el tiempo de llegada, la gran variabilidad en los tiempos de llegada produce un efecto que hace que la distribución de llegada resulte una Poisson con una tasa media de seis por hora. Esto produce aglomeraciones ocasionales en el aeropuerto que pueden ser peligrosas y costosas. Bajo estas circunstancias, ¿cuál será el tiempo promedio que deberá esperar un piloto que circunda el aeropuerto antes de aterrizar?

λ = 6 aviones por hora

μ = 5 minutos (constante)

	Aleatorio	T entre llegadas	Hora llega	Espera	Hora entra servicio	T de servicio	Hora sale
1	0.65551	4.22346	4.22346	x	4.22346	5	9.22346
2	0.01825	40.03586	44.25933	x	44.25933	5	49.25933
3	0.54442	6.08035	50.33967	x	50.33967	5	55.33967
4	0.20811	15.69709	66.03677	x	66.03677	5	71.03677
5	0.73431	3.08830	69.12506	1.91170	71.03677	5	76.0367655
6	0.37300	9.86184	78.98690	x	78.98690	5	83.986905
7	0.99808	0.01925	79.00615	4.98075	83.98690	5	88.986905
8	0.42073	8.65768	87.66383	1.32307	88.98690	5	93.986905
9	0.99487	0.05140	87.71524	6.27167	93.98690	5	98.986905
10	0.03858	32.55141	120.26664	x	120.26664	5	125.266643
11	0.23160	14.62722	134.89386	x	134.89386	5	139.893863
12	0.31230	11.63804	146.53190	x	146.53190	5	151.531905
13	0.69411	3.65121	150.18311	1.34879	151.53190	5	156.531905
14	0.36796	9.99777	160.18087	x	160.18087	5	165.180875
15	0.31581	11.52629	171.70716	x	171.70716	5	176.707161
16	0.78228	2.45541	174.16257	2.54459	176.70716	5	181.707161
17	0.29814	12.10208	186.26465	x	186.26465	5	191.264653
18	0.96908	0.31403	186.57868	4.68597	191.26465	5	196.264653
19	0.90768	0.96862	187.54730	8.71735	196.26465	5	201.264653
20	0.91671	0.86959	188.41689	12.84776	201.26465	5	206.264653
				44.63166			

Los tiempos en la tabla están en minutos.

En promedio, cada avión espera 44.63 minutos entre 20 llegadas simuladas; esto significa un tiempo de espera antes de aterrizar de 2 minutos con 14 segundos.

5.8 Líneas de Espera

Se tiene un sistema de colas en tres etapas, cada cliente debe pasar sucesivamente por tres estaciones. Los clientes llegan según una distribución de Poisson de media 3 llegadas por hora. Los tiempos de servicio en las estaciones son:

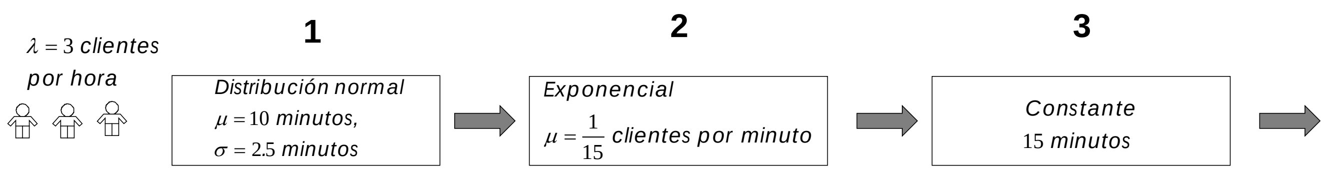
Estación 1: Distribución normal media = 10 minutos, desviación estándar = 2.5 minutos

Estación 2: Exponencial con media = 1/15 clientes por minuto = 0.0666 clientes por minuto

Estación 3: Constante, 15 minutos

¿Cuál es el tiempo medio de espera?

Modelo de simulación:



Tiempo entre llegadas: $x_i \;=\; -\dfrac{60}{3}\, ln\, r = -\,20\, ln\, r\; (minutos)$

Tiempos de servicio:

Estación 1: $z = \dfrac{x_i - \mu}{\sigma}$

$x_i \;= z\,\sigma + \mu$

$x_i \;= DAN\,(2.5) + 10\; (minutos)$

Estación 2: $X_I = -\dfrac{1}{\mu}\, ln\, r = -\dfrac{1}{0.06666}\, ln\, r = -\,15\, ln\, r\; (minutos)$

Estación 3: Constante, 15 minutos

	Aleatorio	T entre llegadas	Hora llega	Espera	Hora entra a 1	DAN	T de servicio	Hora sale de 1	Espera
1	0.6555	8.447	8.4469	x	8.447	-1.205	7.589	16.036	x
2	0.5444	12.161	20.608	x	20.608	-0.432	9.135	29.743	46.347
3	0.7343	6.177	26.784	2.959	29.743	0.667	11.333	41.076	58.559
4	0.9981	0.038	26.823	14.254	41.076	0.022	10.044	51.120	63.308
5	0.9949	0.103	26.926	24.194	51.120	-1.603	6.794	57.913	69.501
6	0.2316	29.254	56.180	1.733	57.913	1.245	12.490	70.404	105.838
7	0.6941	7.302	63.482	6.921	70.404	0.137	10.274	80.677	113.022
8	0.3158	23.053	86.535	x	86.535	0.573	11.146	97.681	111.015
9	0.2981	24.204	110.739	x	110.739	-0.653	8.693	119.432	92.946
10	0.9077	1.937	112.676	6.756	119.432	0.436	10.872	130.305	82.545
11	0.8775	2.614	115.291	15.014	130.305	-0.004	9.991	140.296	73.858
12	0.0568	57.366	172.657	x	172.657	0.951	11.902	184.559	58.606
13	0.6134	9.774	182.431	2.128	184.559	0.962	11.925	196.484	71.251
14	0.0135	86.117	268.548	x	268.548	1.915	13.830	282.378	x
15	0.3222	22.649	291.197	x	291.197	-0.855	8.290	299.487	x
16	0.1952	32.672	323.869	x	323.869	0.902	11.803	335.672	x
17	0.4030	18.175	342.044	x	342.044	1.289	12.578	354.622	x
18	0.9676	0.659	342.703	11.919	354.622	1.020	12.041	366.663	12.583
19	0.1154	43.183	385.886	x	385.886	0.872	11.745	397.631	x
20	0.3957	18.542	404.428	x	404.428	1.004	12.008	416.436	10.278
				85.879			**214.484**		**969.656**

	Hora entra a 2	Aleatorio	T de servicio	Hora sale	Espera	Hora entra a 3	T de servicio	Hora sale	
1	16.036	0.0183	60.054	76.090	x	76.090	15	91.090	
2	76.090	0.2081	23.546	99.635	x	99.635	15	114.635	
3	99.635	0.3730	14.793	114.428	0.207	114.635	15	129.635	
4	114.428	0.4207	12.987	127.415	2.221	129.635	15	144.635	
5	127.415	0.0386	48.827	176.242	x	176.242	15	191.242	
6	176.242	0.3123	17.457	193.699	x	193.699	15	208.699	
7	193.699	0.3680	14.997	208.696	0.003	208.699	15	223.699	
8	208.696	0.7823	3.683	212.379	11.320	223.699	15	238.699	
9	212.379	0.9691	0.471	212.850	25.849	238.699	15	253.699	
10	212.850	0.9167	1.304	214.154	39.545	253.699	15	268.699	
11	214.154	0.1446	29.010	243.164	25.535	268.699	15	283.699	
12	243.164	0.1944	24.570	267.734	15.965	283.699	15	298.699	
13	267.734	0.9974	0.039	267.773	30.926	298.699	15	313.699	
14	282.378	0.6871	5.629	288.008	25.691	313.699	15	328.699	
15	299.487	0.4836	10.899	310.386	18.313	328.699	15	343.699	
16	335.672	0.7855	3.622	339.294	4.405	343.699	15	358.699	
17	354.622	0.1937	24.624	379.246	x	379.246	15	394.246	
18	366.663	0.4812	10.972	377.634	16.611	394.246	15	409.246	
19	397.631	0.1439	29.083	426.714	x	426.714	15	441.714	
20	416.436	0.7374	4.569	421.005	20.709	441.714	15	456.714	
			341.134		**237.30**		**300**		**2148.45**

El tiempo medio de espera será la suma de los tiempos de espera y de servicio (2148.45 minutos) entre 20 clientes que se simularon = 107.42 minutos = 1 hora con 47 minutos.

5.9 Operación de un centro de cómputo

Suponer que un centro de cómputo pone a disposición de los alumnos una terminal conectada a un ordenador central que funciona a tiempo compartido. Se desea hacer un estudio de este sistema basado en los siguientes puntos:

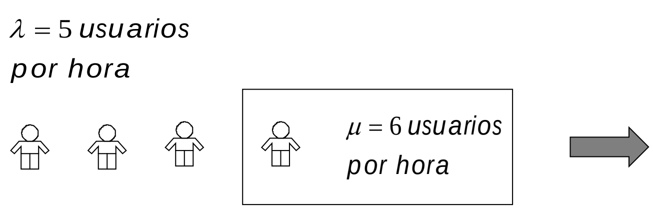
- Las entradas siguen una distribución de Poisson con media de 5 usuarios por hora
- Los tiempos de servicio siguen una distribución exponencial con media de 10 minutos
- El tamaño de la cola puede ser ilimitado, pero sólo hay 4 sillas para esperar, el resto de los usuarios que esperan lo harán de pie

Se desea conocer:

a. Número medio de usuarios en el sistema
b. Número medio de usuarios en la cola
c. Número medio de usuarios cuando hay cola
d. Tiempo medio de espera
e. Porcentaje de usuarios que al llegar al sistema no tienen que esperar
f. Porcentaje de usuarios que tienen que esperar algún tiempo de pie
g. Número de sillas necesario en la fila de espera para que por lo menos el 90 % de los usuarios no tenga que esperar de pie

---

Modelo de simulación:



Tiempo entre llegadas: $x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln r = -\frac{1}{5} \ln r$

Tiempos de servicio: $x_i = -\frac{1}{\mu} \ln r = -\frac{1}{6} \ln r$

	Aleatorio	T entre llegadas	Hora llega	Espera	Hora entra servicio	Aleatorio	T de servicio	Hora sale	L	Lq	L1	De pie
1	0.65551	0.08447	0.08447	x	0.08447	0.01825	0.66726	0.75173	1	0		
2	0.54442	0.12161	0.20608	0.54565	0.75173	0.20811	0.26162	1.01335	2	1	2	
3	0.73431	0.06177	0.26784	0.74551	1.01335	0.37300	0.16436	1.17771	3	2	3	
4	0.99808	0.00038	0.26823	0.90948	1.17771	0.42073	0.14429	1.32201	4	3	4	
5	0.99487	0.00103	0.26926	1.05275	1.32201	0.03858	0.54252	1.86453	5	4	5	
6	0.23160	0.29254	0.56180	1.30273	1.86453	0.31230	0.19397	2.05849	6	5	6	^
7	0.69411	0.07302	0.63482	1.42367	2.05849	0.36796	0.16663	2.22512	7	6	7	^
8	0.31581	0.23053	0.86535	1.35977	2.22512	0.78228	0.04092	2.26605	7	6	7	^
9	0.29814	0.24204	1.10739	1.15865	2.26605	0.96908	0.00523	2.27128	7	6	7	^
10	0.90768	0.01937	1.12676	1.14452	2.27128	0.91671	0.01449	2.28577	8	7	8	^
11	0.87747	0.02614	1.15291	1.13287	2.28577	0.14457	0.32234	2.60811	9	8	9	^
12	0.05679	0.57366	1.72657	0.88154	2.60811	0.19437	0.27300	2.88110	8	7	8	^
13	0.61342	0.09774	1.82431	1.05679	2.88110	0.99741	0.00043	2.88154	9	8	9	^
14	0.01349	0.86117	2.68548	0.19605	2.88154	0.68709	0.06255	2.94408	3	2	3	
15	0.32224	0.22649	2.91197	0.03211	2.94408	0.48357	0.12109	3.06518	3	2	3	
16	0.19523	0.32672	3.23869	x	3.23869	0.78549	0.04024	3.27893	1	0		
17	0.40303	0.18175	3.42044	x	3.42044	0.19367	0.27360	3.69404	1	0		
18	0.96759	0.00659	3.42703	0.26701	3.69404	0.48122	0.12191	3.81594	2	1	2	
19	0.11542	0.43183	3.85886	x	3.85886	0.14386	0.32315	4.18201	1	0	1	
20	0.39570	0.18542	4.04428	0.13773	4.18201	0.73742	0.05077	4.23277	2	1	2	
				13.3468			**3.7904**		**89**	**69**	**86**	

Resultados:

a. **Número medio de usuarios en el sistema, L/20 = 89/20 = 4.45**
b. **Número medio de usuarios en la cola, Lq/20 = 69/20 = 3.45**
c. **Número medio de usuarios cuando hay cola, L1/20 = 86/20 = 4.30**
d. **Tiempo medio de espera, tiempos de espera + tiempos de servicio: (13.3468 + 3.7904)/20 = 0.86 horas**
e. **Porcentaje de usuarios que al llegar al sistema no tienen que esperar; los usuarios que no esperan son el 1, 16, 17 y 19, que representan el 4/20 % = 20 %**
f. **Porcentaje de usuarios que tienen que esperar algún tiempo de pie, (^) = 8/20 = 40 %**
g. **Número de sillas necesario en la fila de espera para que por lo menos el 90 % de los usuarios no tenga que esperar de pie, con 1 silla esperan 13 que representan el 65 % de usuarios.**

5.10 Observaciones Aleatorias

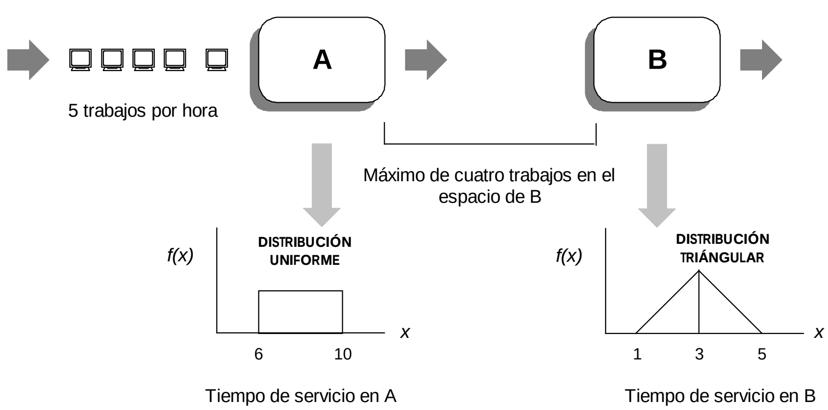
A un taller que tiene dos centros de trabajo, A y B, le llegan trabajos en serie, a una frecuencia exponencial de 5 por hora. Cada trabajo necesita procesarse en ambos centros. Primero en A y después en B. Los trabajos que esperan a ser procesados en cada centro pueden esperar en la cola; la cola para el centro A tiene espacio ilimitado y la cola para B sólo tiene espacio para cuatro trabajos. Si el espacio alcanza su capacidad no pueden salir los trabajos del centro A. En otras palabras, el centro A interrumpe su trabajo hasta que haya lugar en la cola de B. El tiempo de procesamiento de un trabajo en el centro A, se distribuye de modo uniforme en el intervalo [6, 10]. El tiempo de procesamiento para un trabajo en el centro B se representa mediante la λsiguiente distribución triangular:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}(x-1) & si\ 1 \le x \le 3 \\ \frac{1}{4}(5-x) & si\ 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

Construir un modelo de simulación de este sistema, para determinar las siguientes medidas de desempeño:

1) El número esperado de trabajos en el taller en cualquier momento.
2) El porcentaje de tiempo que se detiene el centro A por falta de espacio en la cola del centro B.
3) El tiempo esperado de terminación de un trabajo.

Modelo de simulación



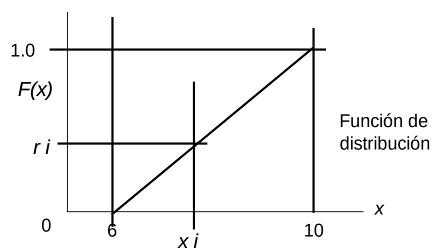
Simulación del tiempo entre llegadas (distribución exponencial)

λ = 5 trabajos por hora = 0.08333 trabajos por minuto

x_i= Tiempo entre llegadas = $-\frac{1}{\lambda}\ln r$, donde r es un decimal aleatorio de la distribución exponencial.

Tiempo entre llegadas = $-\frac{1}{0.0833}\ln r$ = **12 ln r**

Simulación del tiempo de servicio en A (distribución uniforme)

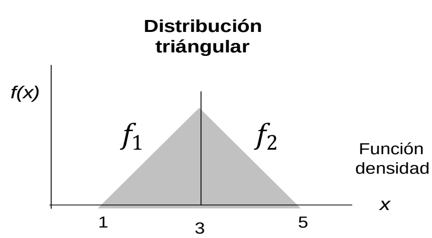


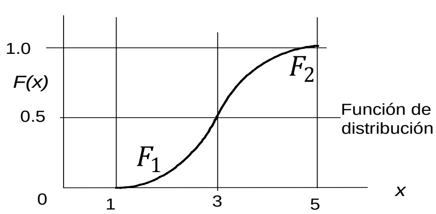
$$\frac{1}{10-6} = \frac{r_i}{x_i - 6}$$

$$x_i - 6 = r_i\,(10-6)$$

$$\boldsymbol{x_i = 4\, r_i + 6}$$

Simulación del tiempo de servicio en B (distribución triangular)





$$F_1(x) = \frac{1}{4}\int_1^x (x-1)dx$$

$$F_1(x) = \frac{1}{4}\int_1^x x dx - \frac{1}{4}\int_1^x dx = \frac{1}{4}\,\frac{x^2}{2}\Big]_1^x - \frac{1}{4}\,x\,\Big]_1^x = r_i$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} - r_i = 0$$

$$x = \frac{0.25+\sqrt{0.0625-4(0.125)(0.125-r_i)}}{0.25} =$$

$$x = \frac{\mathbf{0.25}+\sqrt{\mathbf{0.5}\,\boldsymbol{r_i}}}{\mathbf{0.25}}$$

$$F_2(x) = 0.5 + \frac{1}{4}\int_3^x (5-x)dx = 0.5 + \frac{5}{4}\int_3^x dx - \frac{1}{4}\int_3^x xdx$$

$$= 0.5 + \frac{5}{4}\,x\,\Big]_3^x - \frac{1}{4}\,\frac{x^2}{2}\Big]_3^x$$

$$= 0.5 + \frac{5}{4}\,x - \frac{15}{4} - \left(\frac{1}{8}\,x^2 - \frac{9}{8}\right) - r_i = 0$$

$$-0.125\,x^2 + 1.25\,x - \frac{17}{8} - r_i = 0$$

$$x = \frac{-1.25 + \sqrt{1.25^2 - 4(-0.125)(-\frac{17}{8} - r_i)}}{-0.25}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{1.25 - \sqrt{0.5 - 0.5\,r_i}}{0.25}}$$

Simulación en Excel:

	Aleatorio	T entre lleg.	Hora entra a A	Aleatorio	T servicio A	Hora sale de A	Espera en B	Hora entra a B	Aleatorio	T servicio B	T servicio B	Hora sale de B	L
1	0.77413	3.0721	3.0721	0.00970	6.0388	9.1110		9.1110	0.05036	1.6347		10.7457	1
2	0.18357	20.3420	23.4141	0.02557	6.1023	29.5164		29.5164	0.25272	2.4219		31.9383	2
3	0.37776	11.6820	35.0961	0.88553	9.5421	44.6382		44.6382	0.30689	2.5669		47.2051	1
4	0.92911	0.8824	35.9785	0.74285	8.9714	44.9499	2.2552	47.2051	0.74264		3.5651	50.7703	2
5	0.47426	8.9521	44.9306	0.42384	7.6954	52.6260		52.6260	0.62954		3.2785	55.9044	3
6	0.88571	1.4564	46.3870	0.88787	9.5515	55.9385		55.9385	0.89898		4.1010	60.0396	4
7	0.32395	13.5258	59.9129	0.64028	8.5611	68.4740		68.4740	0.51860		3.0376	71.5115	2
8	0.09854	27.8070	87.7199	0.12363	6.4945	94.2144		94.2144	0.02460	1.4436		95.6580	1
9	0.07996	30.3150	118.0348	0.07794	6.3118	124.3466		124.3466	0.77499		3.6583	128.0049	1
10	0.56160	6.9236	124.9584	0.21659	6.8664	131.8247		131.8247	0.76308		3.6233	135.4480	2
11	0.42076	10.3883	135.3467	0.56169	8.2468	143.5935		143.5935	0.28086	2.4990		146.0925	2
12	0.74584	3.5189	138.8656	0.83853	9.3541	148.2197		148.2197	0.53267		3.0664	151.2862	2
13	0.72839	3.8031	142.6687	0.22224	6.8889	149.5577	1.7285	151.2862	0.25117	2.4175		153.7037	3
14	0.87268	1.6343	144.3030	0.66417	8.6567	152.9597	0.7440	153.7037	0.47942	2.9584		156.6621	4
15	0.49123	8.5302	152.8332	0.50252	8.0101	160.8433		160.8433	0.57018		3.1457	163.9889	3
16	0.83755	2.1273	154.9605	0.79977	9.1991	164.1596		164.1596	0.59407		3.1979	167.3575	3
17	0.74590	3.5179	158.4784	0.45326	7.8130	166.2915	1.0661	167.3575	0.04135	1.5752		168.9327	3
18	0.05014	35.9148	194.3932	0.49312	7.9725	202.3657		202.3657	0.89059		4.0644	206.4301	1
19	0.61638	5.8067	200.1999	0.89294	9.5718	209.7716		209.7716	0.57591		3.1581	212.9297	2
20	0.86557	1.7325	201.9323	0.85159	9.4064	211.3387	1.5910	212.9297	0.21665	2.3165		215.2462	3
					161.2546		**7.3848**			**19.8336**	**37.8963**		**45**

1) **El número esperado de trabajos en el taller en cualquier momento: L/20 = 45/20 = 2.25 trabajos**
2) **El porcentaje de tiempo que se detiene el centro A por falta de espacio en la cola del centro B: no sucede nunca, es 0.**
3) **El tiempo esperado de terminación de un trabajo: (161.2546 + 7.3848 +19.8336)/20 = 11.3185 minutos**

BIBLIOGRAFÍA

1. Winston, Wayne L.,1990. 1ª Edición
   Investigación de Operaciones
   Grupo Editorial Iberoamérica S. A de C. V., México

2. Samayoa Aquino, Iveth A.; Grajales Marín, José F., 2010. 1º Edición
   Apuntes de Teoría de Decisiones
   Editorial UNACH,
   México

3. Sasieni, Maurice; Yaspan, Arthur; Friedman, Lawrence., 1982. 8ª Edición
   Investigación de Operaciones
   Editorial Limusa S. A de C. V,
   Grupo Noriega Editores, México

4. Namakforoosh, Mohammad Naghi. 1996. 4ª Edición
   Investigación de Operaciones, Interpretación de Modelos y Casos
   Editorial Limusa S. A de C. V,
   Grupo Noriega Editores, México

5. Gerez Greiser, Victor; Csitróm, Verónica, 1978. 1ª Edición
   Introducción al Análisis de Sistemas e Investigación de Operaciones
   Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A., México

6. Ackoff, Russell L. y Sasieni M. W, 1985.
   Fundamentos de Investigación de Operaciones
   Editorial Limusa S. A de C. V,
   Grupo Noriega Editores, México

7. Thierauf Robert J. y Grosse Richard A., 1976. 3ª Edición
   Toma de Decisiones por Medio de Investigación de operaciones
   Editorial Limusa. S. A de C. V,
   Grupo Noriega editores, México

8. Hillier Frederick S. Y Lieberman, Gerald J., 1992. 1ª Edición
   Introduction to Operations Research
   Holden-day, Inc. San Francisco, California, USA

9. Davis, Roscoe K.; McKeown, Patrick G. 1986. 1ª Edición
   Modelos Cuantitativos para Administración
   Grupo Editorial Iberoamérica, S. A de C. V., México