

ISSN: 1665-4668



Revista

PAKBOL

Año 17 Agosto 2018 Facultad de Ingeniería Universidad Autónoma de Chiapas

latindex

Folio: 23060  
www.latindex.org



ingeniería



*Planta geométrica Aloe Polyphylla*

## DIRECTORIO

**Mtro. Carlos Eugenio Ruiz Hernández**  
Rector de la UNACH

**Mtro. Hugo Armando Aguilar Aguilar**  
Secretario General-UNACH

**Mtro. Roberto Sosa Rincón**  
Secretario Académico-UNACH

**Lic. Erick Emmanuel Luis Gijón**  
Encargado de la Secretaría Administrativa-UNACH

**Dr. Lisandro Montesinos Salazar**  
Director General de Planeación

**Dra. María Eugenia Culebro Mandujano**  
Directora General de Investigación y Posgrado

**Mtro. Víctor Fabián Rumaya Farrera**  
Director General de Extensión Universitaria

## FACULTAD DE INGENIERÍA

**Dr. José Ernesto Castellanos Castellanos**  
Director

**Mtro. Ricardo Gabriel Suárez Gómez**  
Secretario Académico

## COMITÉ CIENTÍFICO EXTERNO

**Dra. Gabriela Buendía Abalos**  
Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.  
Universidad Autónoma de Zacatecas, "Francisco García Salinas"

**Dra. Alba Nérida García Beltrán**  
Universidad Nacional de la Patagonia  
San Juan Bosco, Argentina

**Dr. Pedro Castro Borges**  
Departamento de Física Aplicada  
CINVESTAV-IPN, Unidad Mérida, Yucatán

**Dr. Carlos Artemio Coello Coello**  
Departamento de Computación  
CINVESTAV-IPN, Zacateco

**Dr. Luis Gil Espert**  
Universidad Politécnica de Catalunya  
Campus Terrassa

**Dr. Noé Villegas Flores**  
Universidad Federal de la Integración Latinoamericana (UNILA)  
Foz de Iguaçu, Brasil.

## COMITÉ CIENTÍFICO INTERNO

**M.I José Edgar Villalobos Enciso**  
Ingeniería Hidráulica y Ambiental

**M.I Jorge Alfredo Aguilar Carboney**  
Prevención de Desastres Naturales

**M.I José Francisco Grajales Marín**  
Construcción Sustentable

**Dr. Hipólito Hernández Pérez**  
Desarrollo y Didáctica de la Matemática Educativa

**Dr. Hugo Alejandro Guillen Trujillo**  
Centro de Eco tecnologías y Desarrollo Sustentable

**Dr. Francisco Alberto Alonso Farrera**  
Encargado de la Unidad de Consultoría e Ingeniería Aplicada

**Dr. Juan José Cruz Solís**  
Coordinador de Investigación y Posgrado de la Facultad

## CONSEJO EDITORIAL

**Dr. José Ernesto Castellanos Castellanos**  
**Dra. Patricia Elke Rodríguez Schaeffer**  
LCC. Marcela Aguilar Aquino

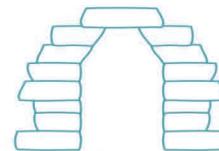
**Dra. Patricia Elke Rodríguez Schaeffer**  
Directora de la Revista

**LCC. Marcela Aguilar Aquino**  
**L.C Miguel Alejandro Espino Guzmán**  
Departamento Editorial

**LCC. Marcela Aguilar Aquino**  
Formación y Diseño Editorial

## CONTENIDO

<b>Editorial</b>	3
<b>Sumario</b>	4
Islóneas de evapotranspiración para el escenario A1B de cambio climático. <i>Martín mundo M.</i>	5
Evaluación del beneficio / costo de los proyectos de agua potable en comunidades pequeñas. <i>Julio C. Villatoro A., Fredy H. Caballero R., Arcadio Zebadúa S., Leopoldo Hernández V.</i>	11
Análisis de capacidad vial acceso al centro comercial Ámbar Fashion Mall, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. <i>Humberto M. Sansebastián G., Raúl E. Silva V.</i>	15
Obtención de la ecuación fundamental de la dinámica estructural mediante la dinámica Lagrangiana. <i>Omar de la Cruz C.</i>	20
Los paradigmas en el cálculo integral: un acercamiento a sus implicaciones conceptuales y didácticas. <i>Pedro t. Ortiz o., Patricia G. Sánchez I., Pedro A. Guadalupe O.</i>	28
Uso de la calculadora graficadora y sensor de movimiento como mediador en el aprendizaje de la constante de gravedad y el péndulo simple <i>Hipólito Hernández P., Edgar J. Morales V.</i>	34
Construcción de un viscosímetro rotacional para fines didácticos con elementos de arduino. <i>José G. Pinto, Francisco A. Alonso, Jonathan M. Morales.</i>	40



Publicación financiada con recursos PFCE-2018

Foto portada:

<https://peopleprimetime.com/en/20-photos-of-geometrical-plants-for-symmetry-lovers/>

# EDITORIAL

*Estimados Lectores..*



*En esta edición número 42, se presentan siete trabajos de investigación realizados por los docentes de la Facultad de Ingeniería, CI. En estas investigaciones se establecen propuestas para ir transformando la ingeniería civil, a través del sustento de modelos numéricos, con el fin de identificar el mejor proceso posible entre todas las soluciones, facilitando el entendimiento y la gestión de los parámetros que componen un sistema o proceso, los cuales nos permitan alcanzar un ejercicio profesional más liviano con recursos limitados. Es de notar que la toma de decisiones para la solución de un área de oportunidad, se va volviendo difícil según sea la dimensión y complejidad del entorno, debido a la cuantía de variables inestables que se manipulan, en especial cuando se tienen varios parámetros, por lo tanto, se convierte en un tema en donde es necesario la aplicación de la investigación de operaciones y de modelos matemáticos, los cuales ayudan a la disminución y optimización de las actividades.*

*El Consejo Editorial invita a nuestros lectores a participar en artículos que contribuyan a la labor académica y de investigación para fortalecer la función sustantiva de esta revista, y así mismo agradece a los autores las contribuciones de sus artículos y al Comité Científico por su gran apoyo en la revisión de éstos.*

*Esperando que esta edición sea de su completo interés.*

*Dra. Patricia Elke Rodríguez Schaeffer*  
Directora de la Revista Pakbal

# SUMARIO

5

## ISOLINES OF EVAPOTRANSPIRATION FOR THE A1B SCENARIO OF CLIMATE CHANGE

*Martín Mundo M.*

Este artículo describe los resultados de anomalías de temperaturas procesados de 16 modelos climáticos, con el fin de estimar isolíneas de Eto para nueve estados de la República Mexicana.

---

## EVALUACIÓN DEL BENEFICIO/COSTO DE LOS PROYECTOS DE AGUA POTABLE EN COMUNIDADES PEQUEÑAS

*Julio C. Villatoro A, Fredy Caballero R., Arcadio Zebadúa S., Leopoldo Hernández V.*

Se realiza una investigación la cual consiste en identificar proyectos de agua potable ubicados en distintas regiones en el estado de Chiapas.

11

---

15

## ANÁLISIS DE LA CAPACIDAD VIAL ACCESO AL CENTRO COMERCIAL ÁMBAR FASHION MALL, TUXTLA GUTIÉRREZ.

*Humberto M. Sansebastián G., Raúl E. Silva V.*

En este apartado se presenta un estudio de capacidad vial, así como la clasificación del nivel de servicio de la carretera Panamericana.

---

## OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL MEDIANTE LA DINÁMICA LAGRANGIANA.

*Omar de la Cruz C.*

En estudio se proporciona una breve descripción del cálculo variacional y las ecuaciones de Euler-Lagrange, así como el Principio de Hamilton para finalmente aplicarlo a la obtención de la ecuación fundamental de la dinámica estructural.

20

---

## LOS PARADIGMAS EN EL CÁLCULO INTEGRAL: UN ACERCAMIENTO A SUS IMPLICACIONES CONCEPTUALES Y DIDÁCTICAS

*Pedro T. Ortiz y O., Patricia Gpe. Sánchez I., Pedro A. Guadalupe O.*

En este ensayo se analiza la formación de las ciencias, el caso particular de las matemáticas, bajo el contexto histórico y epistemológico.

---

28

## USO DE LA CALCULADORA GRAFICADORA Y SENSOR DE MOVIMIENTO COMO MEDIADOR EN EL APRENDIZAJE DE LA CONSTANTE DE GRAVEDAD Y EL PÉNDULO SIMPLE

*Hipólito Hernández P., Edgar J. Morales V.*

El presente trabajo distingue los problemas que enfrentan los estudiantes cuando abordan problemas en movimientos uniformemente variados y manejan el valor de la gravedad (g).

34

---

40

## CONSTRUCCION DE UN VISCOSIMETRO ROTACIONAL PARA FINES DIDACTICOS CON ELEMENTOS DE ARDUINO

*José G. Pinto, Francisco A. Alonso, Jonathan M. Morales.*

En este diseño experimental se demuestra que un viscosímetro rotacional (VR) consigue ser utilizado con fines didácticos con la finalidad de proponerlo en la materia de mecánica de fluidos.

## ISOLINES OF EVAPOTRANSPIRATION FOR THE A1B SCENARIO OF CLIMATE CHANGE

Martín Mundo M.<sup>1</sup>

### RESUMEN

*Utilizando los resultados de anomalías de temperaturas procesados de 16 modelos climáticos analizados por expertos del IMTA se estimaron las isolíneas de Eto para nueve estados de la República Mexicana, para el escenario A1B del cuarto informe del IPCC. Aunque los escenarios RCP2.6, RCP4.5, RCP6 y RCP8.5 del quinto informe del IPCC ya existen, este trabajo solo dispuso de datos de anomalías de temperatura del escenario A1B (que está muy cerca de las condiciones del RCP6). Se utilizó el método Hargreaves-Samani (calibrado con el método Pen-man-Monteith ASCE) para estimar isolíneas de Eto para Baja California Sur, Baja California, Chihuahua, Sinaloa, Sonora, Tamaulipas, Nuevo León, Coahuila y Durango. Los principales resultados son: las variaciones ETo entre el escenario contemporáneo (escenario cero) y el escenario 2030 son significativos, según los datos de 160 estaciones meteorológicas; para las variaciones de temperatura entre 0.1 °C y 0.45 °C, la fluctuación ETo correspondiente va del 2% en el escenario actual al 7% en el escenario 2030.*

**Palabras clave:** Evapotranspiración del cultivo de referencia, Hargreaves-Samani, Cambio Climático.

### ABSTRACT

Using the results processed for IMTA from 16 climate models that participated in IPCC for the fourth evaluation report were estimated the reference evapotranspiration (ETo) isolines for two temporary scenarios: zero (current scenario) and 2030 (future scenario) for nine states from Mexico for the A1B scenario of fourth report of IPCC. Although the scenarios RCP2.6, RCP4.5, RCP6 and RCP8.5 of the fifth IPCC report already exist, this work had only data from the A1B. In this work was used the Hargreaves-Samani method (calibrated against the Penman-Monteith ASCE method) in order to estimated isolines Eto for Baja California, Baja California Sur, Chihuahua, Sinaloa, Sonora, Tamaulipas, Nuevo León, Coahuila and Durango. The principal results are: the ETo variations between the contemporary scenario and the 2030 are quite significant, according to the data of 160 meteorological stations; for temperature variations between 0.1C° to 0.45C° the corresponding ETo fluctuation goes from 2% in the current scenario to 7% in the 2030 scenario.

**Keywords:** Reference evapotranspiration, Hargreaves-Samani, Climatic change.

### INTRODUCCIÓN

The major agricultural districts are at the north of the country and they consume 80 of every 100 liters of water used in Mexico, from which 50% of water resource is wasted. Therefore, considering the potential risk and vulnerability of the area, it is important to estimate the effects of climatic change in reference evapotranspiration (ETo) in the principal irrigation districts of the country to calculate the possible growth on water demand, for it would mean to make use of a greater water volume from the dams in a region where this resource is limited.

<sup>1</sup> Investigation Centre Faculty of Engineer Autonomous University of Chiapas. Email: ic\_ingenieros@yahoo.com.mx; Investigation Centre CIDESTA, Email: cidestachi@yahoo.com.mx

However, it is not easy to quantify climate change effects on agriculture for several scientific reasons; the most important of them are three: first, the estimation of the quantitative effects of global warming over future climate involves the use of numeric models on global scale that do not contain all variables influencing the phenomenon (e.g. ocean's CO<sub>2</sub> absorption). It also uses inconsistent data, for example the rate of greenhouse gases emission depends on the anthropogenic effect, especially in the consumption and emission of fossil fuels, choice of technology, economy evolution and demographic growth of each country. In second place the results of global models that estimate future climate (increase or decrease of temperature or precipitation) generate data that cannot be directly applied to specific regions, so it's necessary to regionalize it in a process that, if not executed, directly affects the accuracy of the calculations. In third place, empiric (temperature and radiation models) and semi-empiric (Penman-Monteith models) evapotranspiration models were not designed to estimate the reference evapotranspiration (ET<sub>o</sub>) under climatic change conditions. In its current state, this set of equations is limited to model climate change and its effects on ET<sub>o</sub>, and can be used to perform sensitivity analysis at most. Due to the complexity of global warming effects on temperature estimations, IPCC established different scenarios of climate change that take on account expected variability of conditions instead of a single calculation of greenhouse gas emission, and its relationship with the raise of global temperature. Each exponential shows answers based on different actions to mitigate climate change impact, for example: in the fourth report of IPCC (IPCC, 2000) the higher tendency (upper exponential) is constructed under a vision of total failure in the efforts to diminish the effects of global climate change. The two center exponentials are associated with the hypothesis of the proper function of carbon market, i.e., the state and private actions are effective to diminish the greenhouse gas emission which allows a moderately lesser impact of climate change. Finally, the lower exponential of the graph assumes that all involved countries sign the Kyoto Protocol to mitigate climate change impact. In this work, in spite of the fifth report of IPCC was published (IPCC, 2014) is presented the evapotranspiration simulation using data of average anomalies in temperature obtained

from IPCC for the A1B scenario that is located between RCP6,0 and RCP4,5 (but is very close to the conditions of the RCP6).

### **ET<sub>o</sub> ESTIMATIONS MADE WITH HARGREAVES-SAMANI METHOD AND REGIONAL DATA**

In order to estimate isolines of reference evapotranspiration for nine states of Mexican Republic, the following methodology was used:

- a. A method for calculating ET<sub>o</sub> on the northern region of Mexico was selected. This method was to meet certain requirements, including: the usage of few variables to estimate ET<sub>o</sub>, for the lack of meteorological data prevented the use of the Penman-Monteith (PM) equation; accuracy in the ET<sub>o</sub> estimate results, or close to parallel the precision of the PM equation and to serve as reference for different researchers as a precise method for ET<sub>o</sub> assessment.
- b. The site to calibrate the method was selected. Irrigation district 041 in Valle del Yaqui, state of Sonora was chosen, due to Sonora being one of the most important states in the northern region of the country and having a network of automated meteorological stations for the calibration of the selected method.
- c. The method was calibrated to estimate ET<sub>o</sub>. The daily and monthly results were compared against the estimated results obtained from the witness method (Penman-Monteith ASCE).
- d. The northern states of Mexico which include major irrigation districts were selected. Nine states from the north were designated, as well as 160 meteorological stations that hold records with more than 30 years worth of data.
- e. Climate change scenarios were selected. Once the method for evapotranspiration estimation was calibrated, two types of scenarios were picked, the A1B and the A2. The results obtained with the A1B scenario are presented in this work.
- f. Data of average anomalies in temperature obtained from IPCC models on A1B scenarios was used. The results processed from 16 climate models that participated in IPCC for the fourth evaluation report were analyzed by the hydro-meteorology IMTA (Instituto Mexicano

de Tecnología del Agua by acronym in Spanish) team using the downscaling technique. The data was later used in the research.

- g. The ETo data in the "zero scenario" (current conditions), and the average temperature anomalies calculated for year 2030 were compared. The ETo was evaluated with the current scenario anomalies (present temperature conditions) and the estimated stipulation for year 2030; after that, a comparison was made between both sets.

Therefore, for a precise ETo calculus under climate change scenarios (sensitivity analysis) it would be convenient to use the Penman-Monteith ASCE equation for all the northern part of the country, as the one stated below (Jensen et al, 1990):

$$\tau E_{To} = \left( \frac{\Delta}{\Delta + \gamma^*} \right) (R_n - G) + \left( \frac{\gamma}{\Delta + \gamma^*} \right) \frac{k_a (0.622) \rho \tau \frac{1}{r_a}}{P_a} (e^o - e_z) \quad (1)$$

Where:

- ETo= Evapotranspiration of referenced crop (mmd<sup>-1</sup>)  
 Rn= Net solar radiation on the surface of the crop (MJ m<sup>-2</sup> d<sup>-1</sup>)  
 G= Sensitive heat flux from soil (MJ m<sup>-2</sup> d<sup>-1</sup>)  
 Δ= Vapor pressure curve inclination (kPa)  
 γ= Psychrometric constant (kPa °C<sup>-1</sup>)  
 γ\*= Modified psychrometric constant (kPa °C<sup>-1</sup>)  
 ρ= Density of the fluid at a constant pressure (kg m<sup>-3</sup>)  
 τ= Latent vaporization heat (MJ<sup>-1</sup> °C<sup>-1</sup>)  
 P<sub>a</sub>= Atmospheric pressure (kPa)  
 e<sub>z</sub><sup>o</sup>= Saturated vapor pressure of air at z height (kPa)  
 e<sub>z</sub>= Vapor pressure of air at z height (kPa)  
 r<sub>c</sub>= superficial resistance to vapor transfer (sm<sup>-1</sup>), or simply surface resistance.  
 r<sub>a</sub>= Aerodynamic resistance to sensible heat and vapor transfer (sm<sup>-1</sup>), or aerodynamic resistance.

However this equation needs variables and data that are not available in all studied places. For this reason an analysis was made on over a dozen of empiric methods that would allow calculating with precision the ETo. Thus the Hargreaves-Samani (HS) method was selected to estimates these variables. The HS method originates from various adjustments were made to the initial equation introduced on 1975 (Hargreaves et al, 1982; Hargreaves et al 1985). This HS equation estimates the evapotranspiration of

a harvest using grass as reference. The HS equation is (Jensen et al, 1990):

$$ET_o = 0.0023 R_a (TD)^{1/2} (t_m + 17.8) \quad (2)$$

Where:

TD = Difference between maximum and minimum temperature (°C)

R<sub>a</sub> = Extraterrestrial radiation<sup>1</sup> (mmd<sup>-1</sup>), (R<sub>a</sub> Variable is obtained from tables or with a equation)

RS= Solar radiation (mm d<sup>-1</sup>)

This method is recommended by several investigators for its precision (Jensen et al, 1990; Choisnel et al, 1992); Hargreaves, 1994; Allen, 1995; Amatya et al, 1995). It can even, if required, be used to estimate ETo for periods of five days and on daily scale (Snyder, 2000; Snyder, 2002). It is a simple method that only needs extraterrestrial radiation and minimum and maximum temperature data to calculate ETo. For its calibration the daily and monthly information collected from 10 stations in irrigation district 041, Valle del Yaqui was used. Stations have daily measurements of radiation, relative humidity, wind speed, temperature and precipitation; some with over ten years of data.

## RESULTS

In figures 1 and 2 are shown the results of the comparison between the HS and the Penman-Monteith ASCE methods for the CIANO station, located in block 910, lot 3, in the following coordinates of Ya-

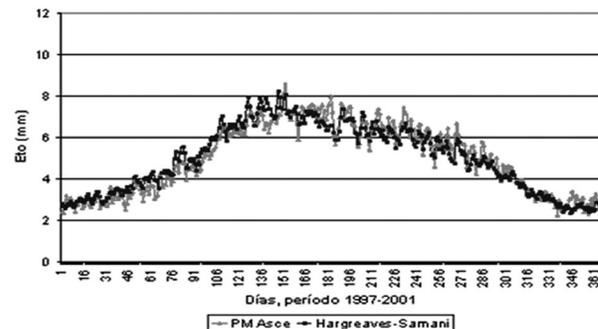


Fig. 1 Penman-Monteith (PM) ASCE vs. Hargreaves-Samani comparison on a daily scale.

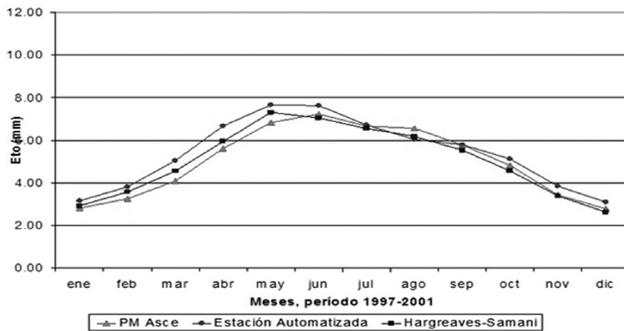


Fig. 2 Penman-Monteith (PM) ASCE vs. Hargreaves-Samani comparison on a monthly scale

qui Valley: 27° 22' 14 North latitudes, 109° 55' 4 West longitudes.

In both cases the linear regression coefficient is higher than 0.92, with a standard deviation from the model of 1.63mm, a quadratic error of 0.44 in the first case and 0.6 in the second case, as well as 0.93 model efficiency for the daily scale and 0.97 for the monthly scale. Once the precision of the method was proven, the selection of the IPCC climate change scenarios proceeded. The results presented in this work were obtained under the A1B scenario considerations. The A1 family is characterized by a rapid economic growth, a global population that will reach its peak in 2025 and a society that adopts and uses efficient technologies. This family divides into two: A1F1 (intense use of petroleum fuels) and A1B (balanced use of different energy sources).

When the scenario was selected, an analysis of the obtained information on the global IPCC models followed. Large scale climate models are not able to adequately simulate climate variations at regional level (regional climate behavior is a stochastic process, conditioned by global climate), therefore it is necessary to use downscaling techniques to complete the process. Downscaling techniques allow the derivation of information from global models to regional ones through the statistic inference of the relationship between both scales. Consequently, investigators from the sub-coordination of hydrometeorology of IMTA2 studied the results of 16 climate models addressed in the Fourth Evaluation Report (2007), from

where the monthly average anomalies registered during the 1960-1989 period for the A1B scenario were obtained from the models using statistic downscaling techniques. With the estimated temperature anomalies for year 2030 (in A1B scenarios), simulations were performed to calculate ETo in the principal irrigation districts of the following states: Baja California, Baja California Sur, Chihuahua, Sinaloa, Sonora, Tamaulipas, Nuevo León, Coahuila and Durango.

Figure 3 shows the ETo isolines for July in the current scenario while figure 4 illustrates ETo isolines for the 2030 scenario.

When both figures are compared, an increment

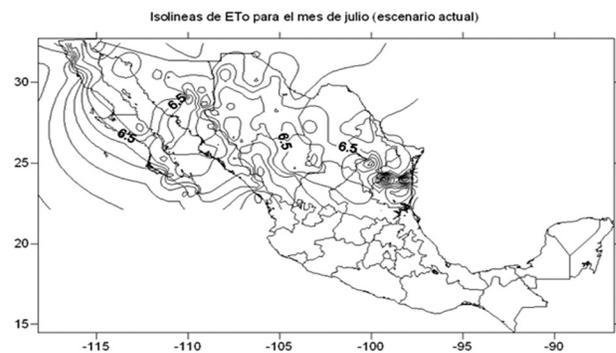


Fig. 3 ETo isolines in July for the current scenario.

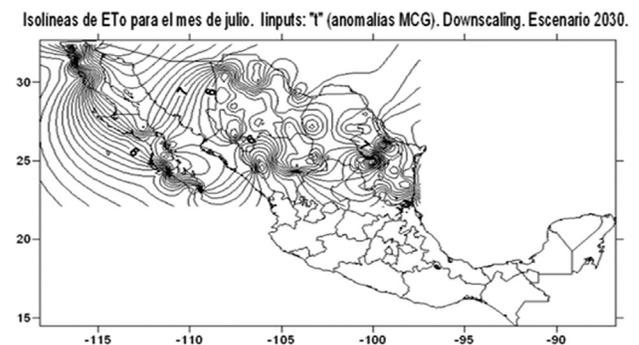


Fig. 4 ETo isolines in July for the 2030 scenario.

by 7% in the ETo is clear between the actual scenario and the 2030 scenario, as well as a major density of isolines in 2030 that indicates greater temperature gradients.

## CONCLUSION

In this study a new methodology to estimate the ETo before climate change scenarios is introduced, which includes the selection of the Hargreaves-Samani method (HS), calibrated and compared against the Penman-Monteith ASCE method in various irrigation districts in the northern part of the country, obtaining ETo estimations with a 93% precision. This procedure was applied to nine states in north Mexico: Baja California, Baja California Sur, Chihuahua, Sinaloa, Sonora, Tamaulipas, Nuevo León, Coahuila and Durango. The principal results are enunciated as follows: the ETo variations between the contemporary scenario and the 2030 scenario are quite significant, according to the data of 160 meteorological stations; for temperature variations between  $0.1\text{C}^\circ$  to  $0.45\text{C}^\circ$  the corresponding ETo fluctuation goes from 2% in the current scenario to 7% in the 2030 scenario. It is prudent to point out that this results are only indicative because of the limitations the evapotranspiration methods have to do ETo estimations under climate change scenarios and the complexity of the theme, however, it is also important to highlight that the results allow to form an idea of the potential effect of mean temperature increase in irrigation zones. Because of the importance of the topic and the need to calculate more accurately the effects of climatic variability in irrigation and seasonal areas, the investigation must continue as well as the developing of new calculation methods that include not only the climate change effect, the needs and availability of water for crops but also the consequence of this changes on crop performance. It's important to develop and adapt methodologies that allow the estimating of crop functionality by using biological simulations, also ones that consider the potential effect of carbon dioxide and water availability. It is also important to obtain the anomaly values of "t" in a lower scale (downscaling), e.g. on a watershed scale or an irrigation district scale to obtain more accurate ETo estimations under climate change scenarios.

## ACKNOWLEDGEMENTS

Special thanks to Dr. Martín José Montero-Martínez and M.D. José Luis Pérez-López, IMTA investigators, for providing data to do the study of average temperature anomalies of the models, regarding mean model climatology for the 1960-1989 period (A1B scene) and Arq. Laura Montserrat Mundo-Navarro for reviewing this paper.

## REFERENCES

- Allen R.G. (1995). Evaluation of procedures for estimating grass reference evapotranspiration using air temperature data only. Rep. Prepared for the United Nation Food and Agricultural Organization. Rome, Italy. In Jensen, D.T., Hargreaves, H.G., Temesgen, B., and Allen, R.G. (1997). Computation of Eto under non ideal conditions. *J. of Irrig. and Drain. Engrg., ASCE*, 123(5), 394-400.
- Amatya, D.M., Skaggs, R.W., Gregory, J.D. (1995). Comparison of methods for estimating REF-ET. *J. Irrig. and Drain. Engrg. ASCE*, 121(6), 427-435.
- Choisnel, E., de Villele, O., and Lacroze, F. (1992). Une approche uniformisee du calcul de Lé-vapotranspiration potentielle pour L'ensemble des PAYS de la communaute europeenne. Un systeme D'Information agronomique pour La Communaute Europeenne, Centre Commun de Recherche, Commission des Communaute Europeennes. In Amatya, D.M., Skaggs, R.W., Gregory, J.D. (1995). Comparison of methods for estimating REF-ET. *J. Irrig. and Drain. Engrg. ASCE*, 121(6), 427-435.
- Hargreaves, G.H., and Samani, Z.A. (1982). Estimating potential evapotranspiration. *Tech., Note, J. Irrig. And Drain. Engrg., ASCE*, 108(3):225-230. In Jensen, M.E., Burman, R.D., and Allen, R.G., (Eds.), (1990). *Evapotranspiration and irrigation water requirements. ASCE manuals and reports on engineering practices No. 70.*, New York, 332 pp.
- Hargreaves, G.L., Hargreaves, G.H., and Riley, J.P. (1985). Irrigation water requirements for Senegal River Basin. *J. of Irrig. and Drain. Engrg., ASCE*, III (3), 2265-275. In Hargreaves, H.G. (1994). Defining and using reference evapotranspiration. *J. of Irrig. and Drain. Engrg., ASCE*, 120(6),1132-1139.

- Hargreaves, H.G. (1994). Defining and using reference evapotranspiration. *J. of Irrig. and Drain. Engrg., ASCE*, 120(6),1132-1139.
- IPCC. (2000). Informe especial del IPCC. Escenario de emisiones. Resumen para responsabilidades políticas. Organización Meteorológica Mundial.
- IPCC. (2014). Cambio climático 2014. Informe de síntesis. Resumen para responsabilidades políticas. Organización Meteorológica Mundial.
- Jensen, M.E., Burman, R.D., and Allen, R.G., (Eds.), (1990). Evapotranspiration and irrigation water requirements. ASCE manuals and reports on engineering practices No. 70., New York, 332 pp.
- Snyder, R.L. (2000). Daily reference evapotranspiration (Eto) calculator. Department of Land, Air and Water Resources, University of California. Davis, California, U.S.A.
- Snyder, R.L. (2002). Epistolary communication.

# EVALUACIÓN DEL BENEFICIO/COSTO DE LOS PROYECTOS DE AGUA POTABLE EN COMUNIDADES PEQUEÑAS

Julio C. Villatoro A., Fredy H. Caballero R., Arcadio Zebadúa S.,  
Leopoldo Hernández V.<sup>1</sup>

## RESUMEN

*Esta investigación consistió en identificar proyectos de agua potable ubicados en distintas regiones en el estado de Chiapas, buscando en ellos información acerca del costo de los proyectos, número de habitantes beneficiados y las enfermedades que predominan en cada comunidad; y con esta información se calculó el costo por cada persona que recibe el beneficio de cada proyecto y finalmente se determinó la relación beneficio/costo del proyecto de agua potable denominado El Copal.*

**Palabras clave:** Identificar, proyecto, agua potable, relación beneficio-costo.

## ABSTRACT

This research consisted of identifying potable water projects located in different regions in the State of Chiapas, looking for information about the cost of the projects, number of inhabitants benefiting and diseases prevailing in each community, and this information was calculated the cost for each person who receives the benefit of each Project. and finally, the benefit / cost ratio of the potable water project called El Copal is determined.

**Keywords:** Identify, project, potable water, cost-benefit ratio.

## INTRODUCCIÓN

Las Naciones Unidas considera el acceso al agua limpia como un derecho básico de la humanidad, y como un paso esencial hacia la mejoría de los estándares de vida en todo el mundo (Comisión Nacional del Agua, 2007). Las comunidades carentes de recursos hídricos, por lo general, son económicamente pobres también, y sus residentes están atrapados en un círculo vicioso de pobreza. Por otra parte, para producir los servicios es necesario realizar estudios económicos para invertir correctamente los recursos económicos en lo que se le denomina proyectos públicos, dentro de estos proyectos están los de agua potable. En este tipo de proyectos se buscan primeramente satisfacer necesidades sociales de las comunidades y, que simultáneamente cumplan con el objetivo de contribuir y hacer más racional el uso de los fondos públicos, además de atender a una población carente de un determinado servicio (o conjunto de servicios) cuyos beneficios regularmente se expresan por el nivel efectivo de satisfacción por parte de los usuarios de cada proyecto.

## ANTECEDENTES

Decidir si se construye una carretera o un hospital, o si se lleva a cabo un programa sanitario o educativo, implica comprometer recursos que siempre son escasos de los que dispone una sociedad no sólo hacia usos concretos frente a otros, sino también hacia los momentos del tiempo frente a otros, ya que la decisión no es simplemente si construir o no, sino también cuándo hacerlo, es por ello muy necesario evaluar los proyectos desde una perspectiva de Beneficio/Costo, buscando siempre obtener el mayor beneficio para las comunidades.

<sup>1</sup> Profesores de la Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Chiapas. Emails: jcvillatoro@prodigy.net.mx, fcaballe@hotmail.com, zebaduaunach@gmail.com, leo-her-val@hotmail.com

## METODOLOGÍA

Para el desarrollo de la presente investigación se realizaron las siguientes etapas:

- Identificar la muestra de proyectos de agua potable construidos y ubicados en distintas regiones del estado de Chiapas y que contaran con información relacionada con los costos de cada obra y la cantidad de habitantes beneficiados por proyecto.
- Investigar las enfermedades que tuvieran relación por la falta de agua potable y los costos que estas implican para cada comunidad.
- Concentrar la información obtenida para su análisis.

Tabla 1. Proyectos de agua potable identificados.

No	Nombre del proyecto	Ubicación	Costo	No. de hab.	Enfermedades
1	Las Ollas	Localidad de las Ollas, municipio de Chamula, Chiapas.	815,087	1 165	Infecciosas intestinales.
2	Sistema de agua potable Los Chorros	Localidad Miguel Utrilla, municipio de Pijijiapan, Chiapas.	164,636	171	Parasitosis y las gastroenteritis Infecciosas.
3	Yabteclum 4ta. Fracción	Municipio de Chenalhó, Chiapas.	1,657,062	391	Enfermedades infecciosas intestinales.
4	Localidad la Verbena	Municipio de Motozintla, Chiapas	2 158 149	236	Enfermedades infecciosas intestinales.
5	El copal	Municipio de Bochil, Chiapas	1,866,509	1 938	Parasitosis y las gastroenteritis Infecciosas.
6	Ranchería Tres Potrillos	Municipio de Chicomuselo, Chiapas	7,398,069	273	Enfermedades infecciosas intestinales.
7	José María	Localidad José María Pino Suarez, municipio de Mapastepec, Chiapas	1,280,786	1 238	Infecciosas intestinales.
8	Sitalá	Cabecera municipal Sitalá, Chiapas.	5,558,603	2 187	Parasitosis y las gastroenteritis Infecciosas.

Fuente: elaboración propia

Para empezar a identificar ciertas diferencias entre los proyectos seleccionados, se procedió a calcular los costos por cada persona que recibe el beneficio de cada proyecto, cuyos resultados son los indicados en tabla 2 e ilustrados en la figura 1, donde se aprecia que existe una gran variedad de costos; razón por la que nos enfocamos a hacer una revisión de los conceptos de obra, las condiciones geográficas y topográficas, de comunicaciones y se concluye en que estas condiciones impactan enormemente en los costos de cada proyecto y sin duda algunos fueron aprobados por cuestiones sociales y políticas.

### Cálculo de la Relación del Beneficio/Costo

Para este análisis se calcularon los costos anuales totales que, supondría lograr en todo un cierto número

Tabla 2. Costo por habitante de los proyectos

Nombre	No. habitantes	Costo/habitante
Las Ollas	1 165	700
Los Chorros	171	962
Yabteclum 4ta. Fracción	391	424
Localidad la Verbena	236	9,145
El Copal	1 938	963
Ranchería Tres Potrillos	273	27,099
José María	1 238	1,035
Sitalá	2 187	2,542

Fuente: elaboración propia.

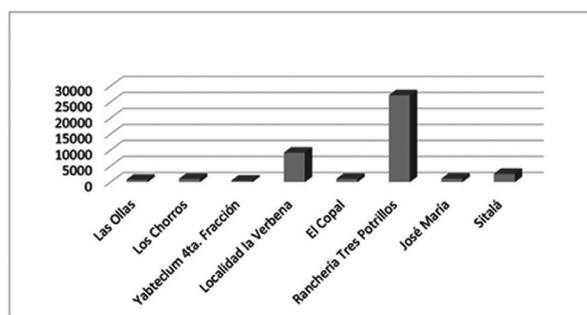


Figura 1. Costo por habitante en cada proyecto.

Fuente: elaboración propia.

de metas seleccionadas. Los costos totales se calcularon como la suma de todos los recursos necesarios para poner en marcha y mantener los proyectos (Coss Bu, 1997). Se incluyeron los costos de inversión en la planificación y construcción de infraestructuras, así como los costos recurrentes de operación y mantenimiento, supervisión y reglamentación. Los costos totales fueron anualizados a fin de obtener un costo final del proyecto, basado en la vida útil de la tecnología utilizada.

Se tomó como modelo para el análisis de beneficio/costo el proyecto de la comunidad "El Copal", ubicado en el municipio de Bochil, Chiapas, cuyos datos actuales son los siguientes:

- Número de habitantes 1938
- Costo del proyecto \$1 866 509
- Enfermedades más frecuentes: Dolor de estómago, diarrea y salmonella

En base a entrevistas realizadas en la clínica de campo del Sector Salud del estado de Chiapas, muy cercana a la comunidad, se obtuvieron los datos de enfermedades, los medicamentos y costos, relacionados en la siguiente tabla 3, en ella se incluyen el número de casos atendidos en el año 2016.

Con el objeto de identificar los verdaderos beneficios que proporciona un proyecto, se requiere planear la situación sin proyecto, esto es, si no se hiciera la inversión, así también hay que tomar en cuenta el crecimiento de las comunidades, a consecuencia de ello, el número de enfermedades aumenta en el mismo porcentaje o aún en porcentaje mayor. Para este análisis se consideró una tasa de crecimiento poblacional anual del 4.74% (INEGI, 2010) y para los costos de medicamentos y consultas del 8% anual y, considerando un horizonte de 15 años, se obtuvieron los datos indicados en las tablas 4, 5 y 6, que en total expresa un costo de \$26,774,880.90, esta can-

tividad es lo que se tendría que gastar en situación sin proyecto. Como ya se indicó el costo de la inversión del proyecto es de \$1,856,509 y al tomar una tasa de descuento del 8% (tasa recomendada por el BID para países en desarrollo) (Valdés, 2009), así que al posicionarlo en el año 2031 el proyecto tendría un costo de \$3,991,205.

**RESULTADO**

Con la construcción del proyecto las enfermedades no se erradican en su totalidad sino más bien,

**Tabla 3. Enfermedades de la comunidad El Copal, municipio de Bochil, Chiapas.**

Enfermedad	Medicamento	Precios de medicamentos	Núm. de personas enfermas al año	Costo anual
Dolor de estómago	Aluminio de magnesio	\$ 50.00	2 380	\$119,000
Diarrea	Trimetoprima Con sulfametazol	\$ 80.00	1 480	\$118,400
Salmonela	Ceftriaxona	\$226.00	976	\$220,576

Fuente: elaboración propia.

**Tabla 4. Dolor estomacal**

Año	No. Casos	Costo medicamentos	Costo consultas	Costo anual
2016	1 938.0	\$ 50.0	\$ 30	\$ 155,040.00
2017	2 029.9	\$ 54.0	\$ 32	\$ 175,380.01
2018	2 126.1	\$ 58.3	\$ 35	\$ 198,388.46
2019	2 226.9	\$ 63.0	\$ 38	\$ 224,415.44
2020	2 332.4	\$ 68.0	\$ 41	\$ 253,856.95
2021	2 443.0	\$ 73.5	\$ 44	\$ 287,160.95
2022	2 558.8	\$ 79.3	\$ 48	\$ 324,834.17
2023	2 680.0	\$ 85.7	\$ 51	\$ 367,449.82
2024	2 807.1	\$ 92.5	\$ 56	\$ 415,656.29
2025	2 940.1	\$100.0	\$ 60	\$ 470,187.07
2026	3 079.5	\$107.9	\$ 65	\$ 531,871.86
2027	3 225.5	\$116.6	\$ 70	\$ 601,649.19
2028	3 378.3	\$125.9	\$ 76	\$ 680,580.75
2029	3 538.5	\$136.0	\$ 82	\$ 769,867.50
2030	3 706.2	\$146.9	\$ 88	\$ 870,867.96
2031	3 881.9	\$158.6	\$ 95	\$ 985,118.86
<b>Suma \$</b>				<b>7,312,325</b>

Fuente: elaboración propia

**Tabla 5. Diarrea**

Año	Número de casos	Costo Medicamento	Costo consulta	Costo anual
2016	1480	80	30	162 800.0
2017	1550	86	32	184 158.1
2018	1624	93	35	208 318.1
2019	1701	101	38	235 647.8
2020	1781	109	41	266 562.9
2021	1866	118	44	301 533.8
2022	1954	127	48	341 092.6
2023	2047	137	51	385 841.3
2024	2144	148	56	436 460.6
2025	2245	160	60	493 720.7
2026	2352	173	65	558 492.9
2027	2463	187	70	631 762.7
2028	2580	201	76	714 644.9
2029	2702	218	82	808 400.6
2030	2830	235	88	914 456.3
2031	2964	254	95	1 034 425.6
<b>SUMA</b>				<b>\$7 678 318.9</b>

Fuente: elaboración propia

**Tabla 6. Salmonela**

Año	Número de casos	Costo Medicamento	Costo consulta	Costo anual
2016	976	\$ 226.0	\$ 30	\$ 249,856.0
2017	1 022	\$ 244.1	\$ 32	\$ 282,635.1
2018	1 071	\$ 263.6	\$ 35	\$ 319,714.6
2019	1 121	\$ 284.7	\$ 38	\$ 361,658.6
2020	1 175	\$ 307.5	\$ 41	\$ 409,105.3
2021	1 230	\$ 332.1	\$ 44	\$ 462,776.6
2022	1 289	\$ 358.6	\$ 48	\$ 523,489.2
2023	1 350	\$ 387.3	\$ 51	\$ 592,166.8
2024	1 414	\$ 418.3	\$ 56	\$ 669,854.4
2025	1 481	\$ 451.8	\$ 60	\$ 757,733.9
2026	1 551	\$ 487.9	\$ 65	\$ 857,142.5
2027	1 624	\$ 527.0	\$ 70	\$ 969,592.7
2028	1 701	\$ 569.1	\$ 76	\$ 1,096,795.6
2029	1 782	\$ 614.6	\$ 82	\$ 1,240,686.4
2030	1 866	\$ 663.8	\$ 88	\$ 1,403,454.5
2031	1 955	\$ 716.9	\$ 95	\$ 1,587,576.5
<b>Suma</b>				<b>\$11,784,237</b>

Fuente: elaboración propia

**Tabla 7. Valor presente (VP) de los costos de las enfermedades**

Año/Enfermedades	Dolor de estómago	Diarrea	Salmonela
2016	\$ 155,040.00	\$ 162,800.00	\$ 249,856.00
2017	175,380.01	184,158.10	282,635.10
2018	198,388.46	208,318.10	319,714.60
2019	224,415.44	235,647.80	361,658.60
2020	253,856.95	266,562.90	409,105.30
2021	287,160.95	301,533.80	462,776.60
2022	324,834.17	341,092.60	523,489.20
2023	367,449.82	385,841.30	592,166.80
2024	415,656.29	436,460.60	669,854.40
2025	470,187.07	493,720.70	757,733.90
2026	531,871.86	558,492.90	857,142.50
2027	601,649.19	631,762.70	969,592.70
2028	680,580.75	714,644.90	1,096,795.60
2029	769,867.50	808,400.60	1,240,686.40
2030	870,867.96	914,456.30	1,403,454.50
2031	985,118.86	1,034,425.60	1,587,576.50
<b>Costo parcial</b>	<b>\$ 7,312,325.00</b>	<b>\$ 7,678,318.90</b>	<b>\$ 11,784,237.00</b>
<b>Costo total de las tres enfermedades = \$ 26,774,880.90</b>			

Fuente: elaboración propia

su contribución consiste en disminuir en cierto porcentaje las enfermedades, así para el caso particular, se espera que el proyecto El Copal, contribuya en disminuir un 40% las enfermedades (Fontaine, 2000); y por consecuencia el mismo porcentaje se debe considerar como beneficios del proyecto, de acuerdo a los datos indicados en la tabla 7 el costo de las enfermedades es \$ 26,774,881, así que con la realización del proyecto se consigue un beneficio de \$10,709,952; y con el costo de construcción del proyecto posicionándolo en el año 2031 se logró obtener la relación Beneficio/Costo (B/C) del proyecto el Copal, resultando de:

$$\frac{B}{C} = \frac{10\,709\,952}{3\,991\,205} = 2.683$$

Y de acuerdo a esta técnica de evaluación, al obtener una relación B/C > 1 (Morín Maya, 2009), significa que el proyecto es factible y se debe aceptar. Situaciones similares deben suceder en los demás proyectos para justificar su factibilidad económica.

## DISCUSIÓN

Los proyectos de agua potable, además de reducir las enfermedades proporcionan muchos otros beneficios, unos fácilmente identificables y cuantificables y otros difíciles de cuantificar. Por ejemplo, favorecen el cambio de hábitos de aseo de los habitantes de las comunidades, estos beneficios son intangibles y difíciles de cuantificar, pero se reflejan al proporcionar una mejor calidad de vida, y no le podemos asignar valor monetario, pero deben ser incluidos, siempre que sea posible en todo análisis de costos y beneficios. Al fijarnos en la figura 1, los proyectos la Verbena y Tres Potrillos tienen costos por habitantes muy altos y de acuerdo a esta técnica difícilmente podrían ser aprobados, es sin duda que han sido autorizados por medios políticos o por presiones sociales.

## CONCLUSIÓN

Como lo demuestra la metodología del beneficio/costo es importante invertir, cuidar y mantener la infraestructura, ya que a través de ella se lograrán mejores niveles de bienestar para la población, aunado a grandes ahorros en gastos por padecimientos ligados a la falta de obras de servicios, como son los

sistemas de agua potable.

Los gobiernos y la sociedad deben preocuparse más para disminuir la brecha existente entre la cobertura de las redes de abastecimiento de agua y las redes de alcantarillado sanitario, ya no se debe pensar en dotación de agua potable, sino se integra también el tratamiento y desalojo adecuado.

Refiriéndonos nuevamente al proyecto El copal, si éste se le proporciona el mantenimiento y la operación adecuada, su horizonte de vida útil puede aumentar a varios años más, y esto mejoraría aún los beneficios, consecuentemente su relación de Beneficio/Costo puede ampliarse. Cabe destacar que los gastos por operación y mantenimiento cotidiano de los sistemas de agua potable corren por cuenta de la población, por lo que se debe de establecer una organización que se encargue de recabar cuotas para estos fines.

Y finalmente se ha encontrado que los proyectos de agua potable en su conjunto son difíciles de estimar y pueden variar ampliamente según la metodología utilizada y los supuestos de partida. Cualquier cálculo de este tipo de proyectos presenta muchas incertidumbres y carecen de una considerable cantidad de datos. Así también, las decisiones para invertir deben ser fundamentadas y razonadas, es por ello imprescindible realizar una evaluación económica bien fundada en las opciones disponibles y esto permitirá a las instancias encargadas de tomar las decisiones en preferir invertir en opciones cuyos beneficios totales superen los costos totales.

## REFERENCIAS

- Comisión Nacional del Agua (2007). Programa de Agua Potable, Alcantarillado y Saneamiento en Zonas Urbanas. México: CNA.
- Coss Bu, R. (1997). Análisis y evaluación de proyectos de inversión. México: Limusa Noriega editores.
- Fontaine, E. R. (2000). Evaluación Social de Proyectos. Bogotá: Alfaomega.
- INEGI (2010). Censo de población y vivienda 2010. Recuperado de: <http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/ccpv/cpv2010/Default.aspx>
- Morín Maya, E. (2009). Principios y Aplicaciones del Análisis del Costo-Beneficio. México: PIAPEM.
- Valdés, M. (2009). Modelos de Evaluación de proyectos Sociales. Recuperado de: [http://www.mapunet.org/documentos/mapuche/modelos\\_evaluacion.PDF](http://www.mapunet.org/documentos/mapuche/modelos_evaluacion.PDF).

# ANÁLISIS DE CAPACIDAD VIAL ACCESO AL CENTRO COMERCIAL ÁMBAR FASHION MALL, TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS

Humberto M. Sansebastián G.<sup>1</sup>, Raúl E. Silva V.<sup>1</sup>

## RESUMEN

*Se presenta tanto el estudio de capacidad vial, como la clasificación del nivel de servicio de la carretera Panamericana, en donde se ubica el Centro Comercial Ámbar Fashion Mall.*

*En las horas pico, gran parte de las vialidades en las ciudades operan muy cerca de su capacidad de diseño, lo que implica que pequeños aumentos en los flujos de tránsito afecten la calidad de éstos.*

*La construcción del centro comercial Ámbar Fashion Mall en Tuxtla Gutiérrez, provocará problemas de congestionamiento en la zona oriente de la ciudad.*

*El principal objetivo es analizar las condiciones actuales de operación para la carretera Panamericana en donde se ubica el Centro Comercial Ámbar Fashion Mall.*

*Los resultados obtenidos ejemplifican las condiciones actuales del tránsito vehicular, como la diferencia entre los volúmenes de servicio en los dos sentidos del Boulevard, también se determinaron los niveles de servicio "C" y "D".*

**Palabras Claves:** Capacidad vial, Nivel de servicio, Congestionamiento, Tráfico y Relación volumen-capacidad.

## ABSTRACT

A study of road capacity is presented, as well as the classification of the service level of the Pan American Highway, where the Amber Fashion Mall Shopping Center is located.

At peak hours, most of the roads in the cities operates near its design capacity, implying that small increases in traffic flows affect the quality of these.

The construction of this shopping centre in Tuxtla Gutiérrez will cause problems of congestion in the area east of the city.

The main objective is to analyse the current conditions of operation for the Pan-American Highway where the Amber Fashion Mall Shopping Center is located.

The results illustrate the current conditions of the vehicular traffic, as the difference between the volumes of service in both directions of the Boulevard, also determined the levels of service "C" and "D".

**Keywords:** Road capacity, service level, congestion, traffic and relationship volumen-capacity.

## INTRODUCCIÓN

La ciudad de Tuxtla Gutiérrez cuenta con tres vialidades principales en el sentido de Oriente a Poniente, la población hace uso de ellas para llegar a la mayoría de los destinos.

Si se presentara alguna situación en la que alguna de estas calles fuese bloqueada, una zona de la ciudad tendría problemas de movilidad y un aumento en el tráfico vehicular.

Los constantes mantenimientos que se les dan a las calles, aunado a los problemas sociales que se han vivido en los últimos años, han provocado que la deficiencia en el flujo vehicular sea ya común en la ciudad.

<sup>1</sup> Profesor-Investigador, Facultad de Ingeniería- Universidad Autónoma de Chiapas. Email: hmiguel@unach.mx

<sup>2</sup> Tesista, Facultad de Ingeniería-Universidad Autónoma de Chiapas. Email: raulslv7@gmail.com

Las repercusiones no solo son para los usuarios de los vehículos, también se incluye a casi toda la población urbana.

Las consecuencias de la congestión vial son variadas, y pueden ser tanto directas como indirectas.

Entre las directas se tienen mayor gasto en combustible, mayor tiempo de espera en los semáforos o en búsqueda de lugares de estacionamiento y más probabilidad de sufrir accidentes.

Las indirectas serían, una calidad de vida merma por el estrés que origina la necesidad de llegar a tiempo al destino, problema que sufre la clase trabajadora debido a la preocupación por cumplir con sus horarios de trabajo, como también en los estudiantes, por citar algunas.

El transporte público en la ciudad se caracteriza por su elevado número de unidades pero con poca capacidad, imprudencia por parte de los conductores, así como filas de espera en los sitios de control de cada ruta o peor aún, buscando pasaje en zonas urbanas, la provisión de infraestructura vial para satisfacer la demanda de los períodos de punta tiene un costo muy elevado.

En la elaboración de esta investigación, se abarcaron temas como el análisis y la caracterización del tráfico actual de la vialidad, y las propuestas de solución acordes a las alternativas posibles que cuente la zona oriente de la ciudad. (Mayor, 1994)

### Objetivos

Analizar la capacidad vial, así como el nivel de servicio que opera la carretera Panamericana. Con esto, se podrá determinar si esta vialidad es capaz de alojar el tránsito que se presentará a futuro. (CalyMayor, 1994)

Proponer la solución a los problemas de congestión habituales, causados por el transporte público aglomerado en una zona específica, así como los automóviles particulares. Una de ellas es la creación de zonas de estacionamiento para ambos sentidos de la vialidad, así como la creación de un paso a desnivel que brinde flujo constante a los vehículos que no requieran ingresar al centro comercial. (Johnson, 2004)

### METODOLOGÍA

Para analizar la capacidad vial y así darle un ni-

vel de servicio a la vialidad en estudio, es necesario conocer las características geométricas, así como las condiciones del tráfico. (L., 2000)

Uno de los primeros estudios que se debe realizar es el aforo vehicular. Con este, se contabilizan y clasifican los automóviles y vehículos que pasen por cierto tramo de una avenida. Otras características que se pueden obtener de los aforos son los movimientos que realizan en las intersecciones, así como el origen y destino de los usuarios, las paradas del transporte público, etc. (L., 2000)

Como el volumen de tránsito no está distribuido equitativamente a lo largo del día, las infraestructuras a menudo se diseñan para las máximas demandas que ocurren en periodos tan cortos como 15 minutos o una hora, durante otros periodos de tiempo, los caminos son a menudo sub utilizados. (Ortúzar, 2008)

El tráfico no se distribuye de manera equitativa sobre los carriles disponibles o direcciones de una infraestructura dada. La demanda de tránsito varía por mes del año, por día de la semana, por hora del día y por intervalos de sub-hora, dentro de una hora. (L., 2000)

Las variaciones por época o mensuales en la demanda de tránsito se reflejan según la actividad social y económica del área en estudio. (Ortúzar, 2008)

Debido a estas particularidades, se realizaron aforos de 7 a 9 AM., de 12 a 2 PM., y de 4 a 6 PM., tomando días hábiles aleatoriamente. Se debe tener cuidado con los días festivos y otros eventos que puedan afectar la recolección de datos. (Johnson, 2004)

Teniendo los datos anteriormente descritos, se procede realizar el cálculo del Nivel de Servicio y la Capacidad Vial. (Mayor, 1994)

Las fórmulas toman en cuenta muchas variables, que se irán detallando sobre la explicación:

**Capacidad Real ( $C_R$ ):** se define como la capacidad de una sección de carretera, el máximo número de vehículos que tienen una probabilidad razonable de atravesar dicha sección durante un determinado período de tiempo. (L., 2000)

$$C_R = 1.900 * N * f_v * f_A * f_P * f_i * f_e * f_{bb} * f_{gd} * f_{gl} * f_{ar}$$

Donde:

N es el número de carriles del grupo de carriles.

$f_v$  El factor de verde, o la relación de la fase res-

- pecto al ciclo.
- $f_A$  Es el factor de corrección por anchura de carriles.
- $f_p$  Es el factor de ajuste por vehículos pesados.
- $f_i$  Es el factor de corrección por inclinación de la rasante.
- $f_e$  Es el factor de corrección por el efecto del estacionamiento.
- $f_{bb}$  Es el factor de ajuste por la influencia de las paradas de autobús.
- $f_{gd}$  Es el factor de corrección por efecto de los giros a la derecha.
- $f_{gl}$  Es el factor de ajuste por efecto de los giros a la izquierda.
- $f_{ar}$  Es el factor de corrección en función del tipo de zona urbana.

**Volumen de Servicio (VS):** una medida de la calidad que la vía ofrece al usuario.

$$VS = 2000 * N * V/C * W * T * B$$

Donde:

- VS es el volumen de servicio, vehículo/hora, total para un sentido.
- N es el número de carriles en un sentido.
- V/C es la relación volumen/capacidad.
- W es el factor de ajuste por anchura de un carril y claro lateral.
- T es el factor de ajuste por camiones.
- B es el factor de ajuste por autobuses.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones para la Capacidad Real y el Volumen de Servicio, tienen muchos factores que afectan el resultado, desde los vehículos que se estacionan, hasta las maniobras que se realizan.

### Cálculos de Capacidad Real

El Factor Verde es el más relevante, pues es el cociente entre la duración en segundos de las fases de un semáforo y el ciclo total de éste.

$$f_V = \frac{Fase}{Ciclo}$$

**Sentido oriente a poniente:**

$$f_V = \frac{35}{60} = 0.583$$

$$C_R = 1,900 * 3 * 0.6 * 0.94 * 0.93 * 1.0 * 0.94 * 0.9 * 0.85 * 0.95 * 0.90 = 1,765.24 \text{ veh/hr.}$$

**Sentido poniente a oriente:**

$$f_V = \frac{25}{60} = 0.416$$

$$C_R = 1.900 * 3 * 0.42 * 0.95 * 0.94 * 1.0 * 0.95 * 1.0 * 0.85 * 0.95 * 0.90 = 1,433.15 \text{ veh/hr.}$$

### Cálculos de Volumen de Servicio

**Sentido Oriente a Poniente:**

$$\frac{V}{C} = \frac{1680}{1765.24} = 0.952$$

$$VS = 2000 * 3 * 0.952 * 0.91 * 0.99 * 0.99 = 5,041.59 \text{ veh/hr}$$

**Sentido Poniente a Oriente:**

$$\frac{V}{C} = \frac{1993}{1433.15} = 1.39$$

$$VS = 2000 * 3 * 1.4 * 0.91 * 1.0 * 0.91.0 = 7,929.96 \text{ veh/hr}$$

Los resultados de los distintos tipos de intensidad calculados anteriormente, se recopilan en la Tabla 1. (CalyMayor, 1994)

**Tabla 1. Cálculo de Nivel de Servicio con distintas Intensidades.**

Intensidad	Demora (seg)			
	Ote-Pte	NS	Pte-Ote	NS
Intensidad verde	39.87	D	43.5	E
Intensidad por metro ancho	38.31	D	57.6	E
Intensidad circulante	48.37	E	32.98	D

Con estos datos, se tienen demoras de entre los 33 y casi 60 segundos, en los distintos tipos de intensidad, (la Intensidad por metro ancho fue multiplicada por los 3 carriles), dando Nivel de servicio D para el sentido Oriente a Poniente, con Intensidad verde e Intensidad por metro ancho, también para el sentido Poniente a Oriente con la Intensidad circulante.

Mientras que para el sentido Poniente a Oriente, con la Intensidad verde e Intensidad por metro ancho, y el otro sentido para la Intensidad circulante, se tiene un nivel de servicio E.

Una vez más, se puede observar el flujo que tiene el sentido Poniente a Oriente es el más crítico, pues básicamente, para ir al Centro Comercial Ámbar Fashion Mall, todos los vehículos tomarían la Carretera Panamericana.

## CONCLUSIONES

Con la realización de los aforos en campo se podían ver tendencias muy definidas en cuanto a los horarios en los que se presentaba mayor congestión en la intersección del Boulevard Juan Pablo II y la Carretera Panamericana. En el intervalo de 7:45 a 8:00 horas, se tuvieron las mayores afluencias vehiculares.

La intersección entre la Carretera Panamericana y el Boulevard Juan Pablo II, presentan pequeñas irregularidades que son determinadas por la ubicación en la ciudad. Las personas que decidan ir al centro comercial y a los nuevos atractivos que se desarrollen en el futuro, se dirigirán a la zona oriente de la ciudad, pero la población que viva a los alrededores, no tendrá que desplazarse mucho para llegar a su destino.

Es por ello que el congestionamiento vehicular estará más cargado en el sentido Poniente a Oriente, de las vialidades.

### Propuestas de solución:

Creación de una zona de estacionamiento general, para el transporte público y particular. Figuras 1 y 2.

Para esta opción, se propondrán zonas de aparcamiento divididas en varias secciones, para transportes foráneos, rutas locales, camiones y taxis, distribuidos a lo largo de cada bahía con zonas exclusivas para cada uno.

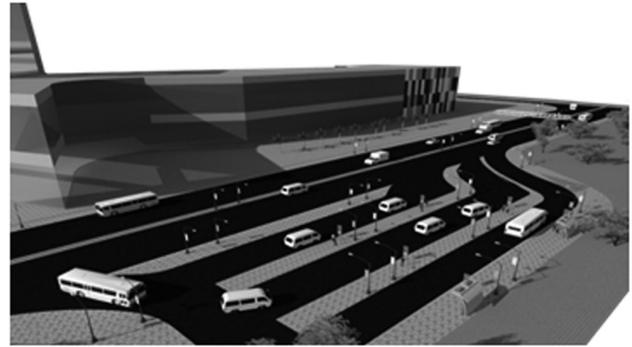


Figura 1. Vista aérea de las bahías. Fuente: propia.

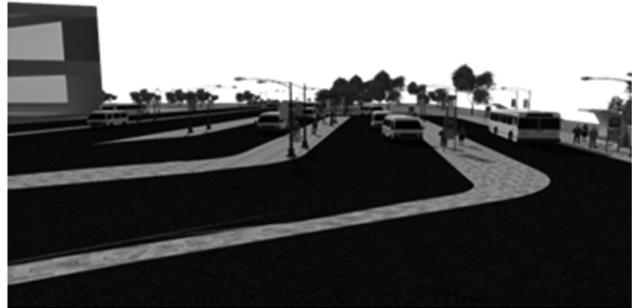


Figura 2. Vista frontal de las bahías. Fuente: propia.

A lo largo de esta zona, sobre la Carretera Panamericana, se localizarán reductores de velocidad y carriles protegidos para que los vehículos puedan salir fácilmente de las bahías.

Como soluciones menos económicas, en el tramo que se localiza en Centro Comercial Ambar Fashion Mall, ubicar un paso de desnivel que agilice el desplazamiento de vehículos que no requieran la entrada a dicho recinto, y que puedan evitarlo, ver Figuras 3 y 4.

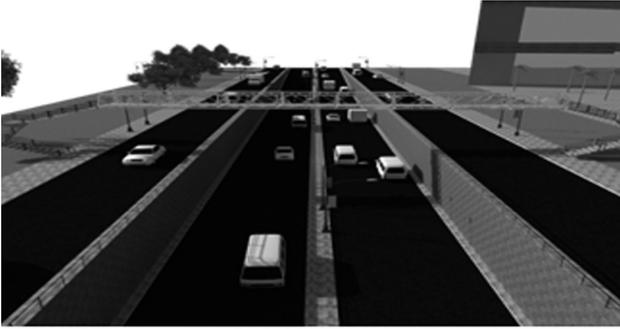


Figura 3. Vista Frontal del paso a desnivel y puente peatonal. Fuente: Propia.

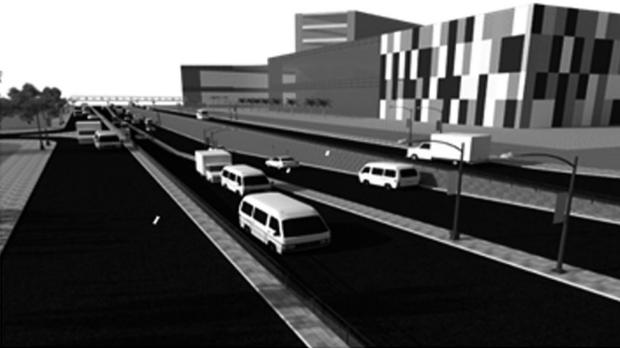


Figura 4. Vista lateral hacia el Centro Comercial Ámbar Fashion Mall. Elaboración: Propia.

## FUENTES DE CONSULTA

### Libros.

- Cal y Mayor R. y Cárdenas J., (1994), Ingeniería de tránsito, fundamentos y aplicaciones, (7a ed.), México, Ed. Alfaomega.
- Gómez Johnson, Ronald C., (2004), Texto del alumno: Ingeniería de tráfico, Universidad Mayor de San Simón, Facultad de Ciencias y Tecnología. Bolivia.
- Ortúzar, J. de D., y Willumsen, L. G., (2008), Modelos de Transporte, (3a ed.), España, Ediciones de la Universidad de Cantabria.

### Manuales y publicaciones técnicas.

- Bañon B. L. y Beví G., J. F., (2000) Manual de carreteras vol. 1 Elementos y Proyecto, (Vol.1), Ortíz e Hijos, Contratistas de Obras, S.A., España

# OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA ESTRUCTURAL MEDIANTE LA DINÁMICA LAGRANGIANA

Omar de la Cruz C.<sup>1</sup>

## RESUMEN

*La Mecánica Analítica basa su estudio de equilibrio y movimiento en dos escalares fundamentales: energía cinética y función trabajo (energía potencial). La suma de la energía cinética y la energía potencial permanece constante durante el movimiento. El principio de mínima acción afirma que el movimiento real en la naturaleza es aquel movimiento particular para el cual la acción asume su más pequeño valor, siendo esta última, el tiempo total que toma una partícula en recorrer la trayectoria entre dos puntos dados. Por otro lado, ante acciones de tipo dinámico una estructura responde modificando su configuración alrededor de una posición de equilibrio estable. Estos cambios de configuración pueden alcanzar grandes amplitudes incluso para valores pequeños de la acción excitadora, pudiendo conducir al colapso de la estructura. En el presente trabajo se da una breve descripción del Cálculo Variacional y las Ecuaciones de Euler-Lagrange, así como el Principio de Hamilton. Se presentan algunos ejemplos del Formalismo Lagrangiano en la Mecánica Clásica, para finalmente aplicarlo a la obtención de la Ecuación fundamental de la Dinámica Estructural.*

**Palabras Clave:** Análisis estructural, Mecánica Analítica, Cálculo Variacional, energía, trabajo.

## ABSTRACT

Analytical Mechanics bases its study of balance and movement on two fundamental scalars: kinetic energy and work function (potential energy). The sum of kinetic energy and the potential energy remains constant during the movement. The principle of least action states that the real movement in nature is that particular movement for which the action assumes its smallest values, which is the total time a particle takes to travel the path between two given points. On the other hand, before actions of dynamic type a structure responds by modifying its configuration around a position of stable equilibrium. These configuration changes can reach large amplitudes even for small values of the excitatory action, which can lead to the collapse of the structure. In the present work we give a brief description of the variational calculus and the Euler-Lagrange equations, as well as the Hamilton Principle. Some examples of the lagrangian formalism in Classical Mechanics are presented, to finally apply it to obtain the Fundamental Equation of Structural Dynamics.

**Keywords:** Structural Dynamics, Analytical Mechanics, Variational Calculus, energy, work.

## INTRODUCCIÓN

En el año de 1687, Isaac Newton en Inglaterra, publicó las leyes del movimiento, sentando las bases de la dinámica a través de un tratamiento vectorial. Conociendo las fuerzas que actúan en una partícula a cada instante, se puede predecir el movimiento que ésta efectuará en el tiempo. Es así como inicia la Mecánica Vectorial. Por otra parte, Leibniz, en Alemania, dedujo ecuaciones similares pero desde un tratamiento analítico. En lugar de considerar a las fuerzas que son vectores, empleó dos cantidades escalares fundamentales: la energía cinética y la fun-

<sup>1</sup> Profesor de la Facultad de Ciencias Física y Matemáticas de la UNACH.  
Email: courtois31415927@hotmail.com

ción trabajo. Con ello surge la Mecánica Analítica. Mientras que la forma vectorial necesita de al menos 3 ecuaciones para la trayectoria de una partícula, la forma escalar nada más necesita de una, pues se vale del supuesto que la suma de la energía cinética y potencial permanece constante durante el movimiento.

Imaginemos una partícula que se encuentra en cierta posición en cierto instante  $(P_1, t_1)$  la cual se desplaza hasta otra posición en otro instante  $(P_2, t_2)$ . Existen infinitas trayectorias entre ambos puntos, y el tiempo tomado entre ambas posiciones es lo que se llama la acción. El principio de mínima acción enuncia que existe entre todas las posibles trayectorias una que minimice esta acción, la cual será escogida por la naturaleza. Euler y Lagrange hicieron este descubrimiento en 1853. Sin embargo, si la energía del sistema depende además de la posición, también del tiempo, el procedimiento varía, dando lugar a lo que se conoce como el Principio de Hamilton. En este caso, se considera que la diferencia de la energía cinética y la energía potencial permanece constante.

Es así como surge el Cálculo Variacional; esta nueva rama de las matemáticas estudia las llamadas variaciones entre funcionales (funciones de funciones), análogamente a las diferencias o incrementos estudiados en el Cálculo Diferencial. La herramienta matemática se consolida disminuyendo en muchos casos el tratamiento vectorial entre los vectores fuerza y momento. Las aplicaciones tienen mayores alcances que salen de la Mecánica Clásica y llegando hasta nuevas áreas de la Física Moderna.

### ANTECEDENTES Cálculo variacional

Se llaman funcionales a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o de varias funciones. Al igual que en el cálculo de una variable, se pretende ahora hallar los valores máximos o mínimos, pero en este caso de los funcionales. El cálculo variacional estudia los métodos que permiten obtener los valores máximos y mínimos de las funcionales (Elsigoltz, 1983). El cálculo variacional se comenzó a desarrollar en 1696, considerándose a Euler como uno de sus fundadores.

Los problemas clásicos del cálculo variacional son los siguientes:

*Problema de la braquistócrona.* En este problema se exige determinar la línea que une dos puntos dados A y B, que no pertenecen a una misma recta vertical, que posea la propiedad de que un punto material se deslice por dicha línea desde el punto A hasta el B en el menor tiempo posible. Tanto el problema como la solución fueron dadas por I. Bernoulli en 1696, siendo el resultado una curva llamada la cicloide.

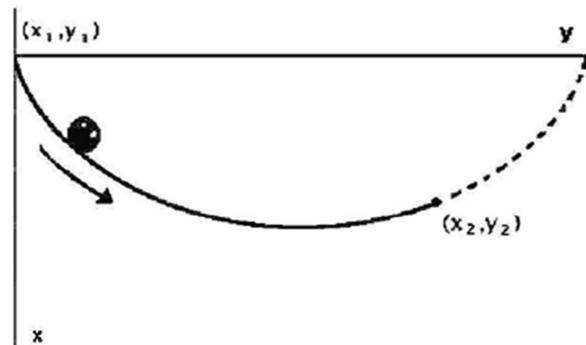


Figura 1. La cicloide

*Problema isoperimétrico.* Se pide hallar una línea cerrada de longitud dada  $l$  que delimite el área máxima  $S$ . Este problema cuya solución es la circunferencia fue resuelto por Euler.

*Problema de las líneas geodésicas.* Se pide determinar la línea de menor longitud que una dos puntos dados en cierta superficie. La solución son precisamente las curvas llamadas geodésicas, y fue dada por Bernoulli, Euler y Lagrange.

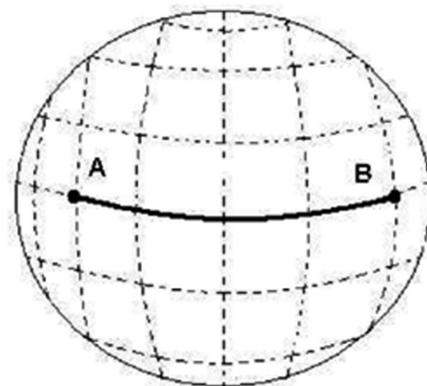


Figura 2. Geodésica de una esfera.

A continuación introduciremos la terminología del cálculo variacional. La variable  $v$  se llama funcional dependiente de la función  $y(x)$  y se designa  $v=v[y(x)]$ . A la diferencia entre dos funciones  $\delta y=y(x)-y_0(x)$  se le llama incremento o variación  $\delta y$  del argumento  $y(x)$  de la funcional  $v=v[y(x)]$ . Un funcional se dice continuo para  $y=y_0(x)$  en el sentido de proximidad de  $k$ -ésimo orden si para todo  $\varepsilon>0$  existe un  $\delta>0$  tal que  $|v[y(x)]-v[y_0(x)]|<\varepsilon$  para

$$\begin{aligned} |y(x) - y_0(x)| &< \delta \\ |y'(x) - y_0'(x)| &< \delta \\ \dots \\ |y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| &< \delta \end{aligned}$$

**La variación de la funcional  $v[y(x)]$  es igual a**

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y] |_{\alpha=0}.$$

**Teorema.** Si la funcional  $v[y(x)]$ , que posee variación, alcanza su máximo o su mínimo para  $y=y_0(x)$ , siendo  $y_0(x)$  un punto interior de la región de la definición de la funcional, entonces para  $y=y_0(x)$  se cumple que  $\delta v=0$  (Amazigo, 1988).

### Ecuación de Euler

Consideremos el funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

con  $F$  una función tres veces derivable. Aplicando el lema fundamental del cálculo variacional se tiene la llamada Ecuación de Euler

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Históricamente, podemos partir de la idea que la naturaleza actúa siempre de tal forma que determinadas cantidades de importancia resultan siempre minimizadas cuando tiene lugar un proceso físico. Hamilton lo enunció de la siguiente manera:

**Principio de Hamilton:** De todas las trayectorias posibles que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de un punto a otro en un intervalo de

tiempo determinado, la trayectoria verdaderamente seguida es aquella que hace mínima la integral temporal de la diferencia entre las energías cinética y potencial. Matemáticamente

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0$$

Ya que la energía cinética  $T$  depende de las velocidades y la energía potencial  $U$  de la posición, si llamamos  $L=T-U$  tenemos que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange tendremos que

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Las cuales son las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula, siendo  $L$  la llamada función de Lagrange o lagrangiana de la partícula.

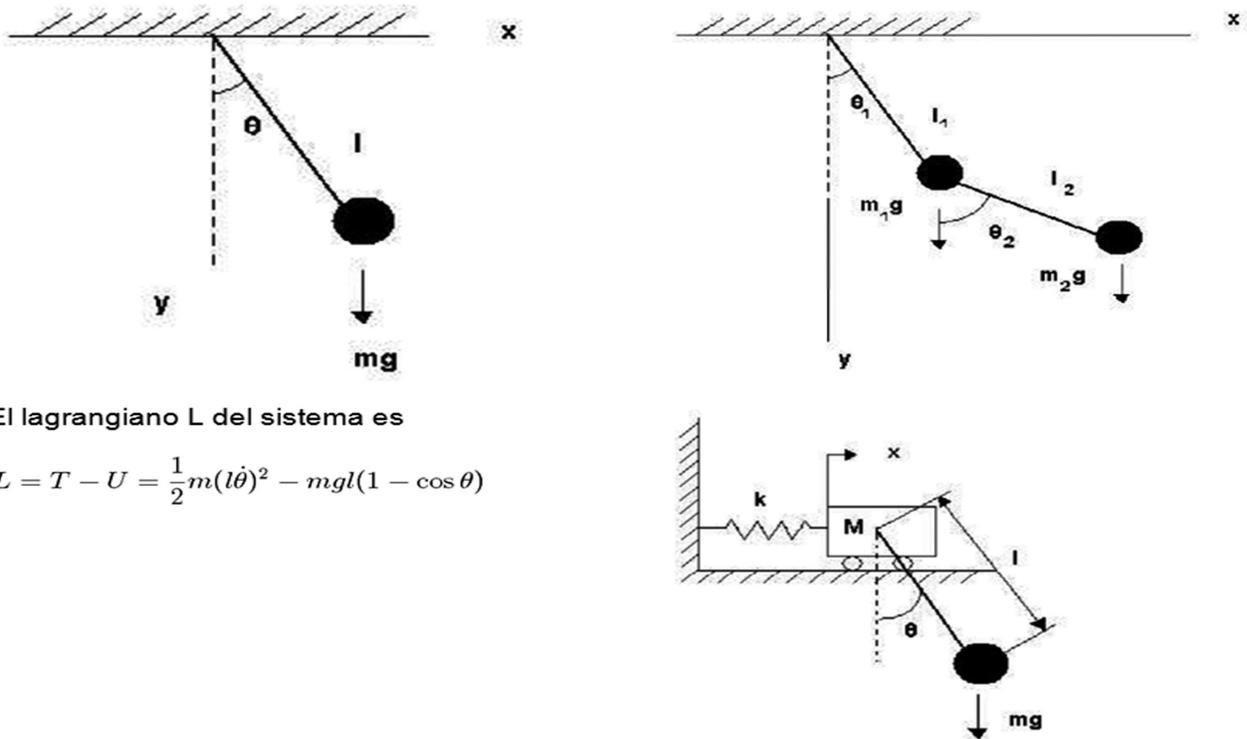
### Aplicaciones a la mecánica clásica

El formalismo lagrangiano se puede aplicar a las leyes de Newton, como se puede observar en los siguientes ejemplos: el péndulo simple, el péndulo doble y el péndulo móvil.

Los respectivos lagrangianos de doble péndulo y del péndulo móvil son

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] - m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) - m_2 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)]$$

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta}) - mgl(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} kx^2 \end{aligned}$$



El lagrangiano  $L$  del sistema es

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

Figura 4. Péndulo simple, péndulo doble y péndulo móvil (Landau, 1970).

### METODOLOGÍA Y RESULTADOS

Cuando las estructuras se someten a cargas o a desplazamientos ofrecen un comportamiento dinámico (Malaktar, 2003). Las fuerzas que actúan sobre éstas son iguales a la masa por la aceleración, de acuerdo a la segunda ley de Newton. Más aún, todas las estructuras reales, tienen potencialmente un número infinito de desplazamientos, por lo que los modelos matemáticos actuales, basados en elementos finitos, están encaminados a proporcionar un esquema computarizado con un número finito pero grande de

masas y un número finito correspondiente de desplazamientos nodales, que simule el comportamiento real de la estructura. La masa total de la estructura se distribuye en los nodos en pequeñas masas (véase Figura). En el caso de estructuras elásticas lineales, se puede conocer con un alto grado de confianza, sus características de rigidez (Pérignon, 2004). Por otro lado, las cargas dinámicas, las propiedades intrínsecas de disipación de energía y condiciones de frontera en diversas estructuras, representan magnitudes difíciles de estimar (por ejemplo, cuando consideramos las cargas asociadas al viento, o el caso de un movimiento sísmico) (Hutton, 1981).

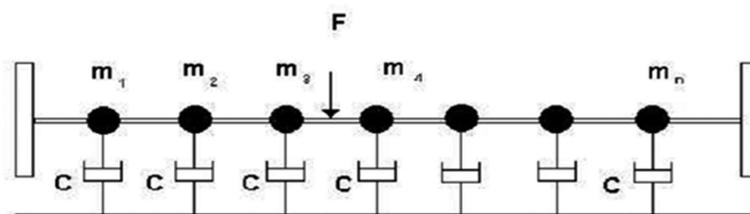


Figura 5. Discretización de una viga

Sin embargo, se han desarrollado esquemas que permiten modelar con bastante aproximación la dinámica de muchas estructuras a través del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = F(t) \quad (1)$$

donde el vector columna  $y$  representa las coordenadas generalizadas  $y_1, \dots, y_n$  usadas en la descripción del movimiento de la estructura;  $M$  es la matriz de masa,  $C$  la matriz de amortiguamiento y  $K$  la matriz de rigidez. Las dimensiones de estas tres últimas matrices es  $n \times n$ , donde  $n$  representa el número de grados de libertad del sistema. El vector dependiente del tiempo, representa las fuerzas generalizadas que actúan sobre la estructura  $f_1(t), \dots, f_n(t)$ . Los elementos de las matrices  $M$ ,  $C$ ,  $K$  son constantes, formadas por entradas reales. Con lo que respecta a  $y$  y a  $F$ , éstas son funciones vectoriales  $t \rightarrow y(t) \in \mathbb{R}^n, t \rightarrow F(t) \in \mathbb{R}^n$ , que en el caso específico de  $y(t)$ , representa la solución de la ecuación matricial (1), por lo que es una función de clase  $C^2$ .

El resto de la sección nos avocaremos a obtener la ecuación (1), haciendo uso para ello de la dinámica lagrangiana.

Supondremos que las ecuaciones que ligan las coordenadas generalizadas y las coordenadas rectangulares no contienen explícitamente al tiempo, o sea,

$$x_{\alpha,i}(y_i), \quad y_j = y_j(x_{\alpha,i})$$

Entonces, la energía cinética será una función de segundo grado y homogénea de las velocidades generalizadas

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j \quad (2)$$

con  $m_{ij}$  funciones de las coordenadas generalizadas  $y_i$ . Sin embargo, un desarrollo local  $T$  alrededor del punto de equilibrio que desdigne los términos superiores al cuadrático impondrá necesariamente que  $m_{ij}$  se puede considerar un término constante y simétrico (Goldstein, 1963)

$$m_{ij} = m_{ji}$$

Otro hecho importante de observar es que la energía cinética  $T > 0$  a menos que las velocidades

generalizadas sean todas nulas lo que implicaría en este caso que  $T = 0$ . Esta propiedad se expresa diciendo que la forma cuadrática (de las velocidades generalizadas)  $T$  es definida positiva, o equivalentemente que la matriz  $M = [m_{ij}]$  asociada a la forma cuadrática  $T$  es definida positiva.

Las estructuras al vibrar, pueden disipar y/o almacenar energía por diversos medios. La energía debida al movimiento es descrita por la energía cinética. Por otro lado las estructuras pueden almacenar energía por medio de las fuerzas elásticas, las cuales en muchos casos, podemos expresarlas a través de un potencial escalar  $V = V(y_1, \dots, y_n)$ , función únicamente de las coordenadas generalizadas.

Desde el punto de la Física, la disipación de energía pueden ser de dos tipos: fricción coulombiana y amortiguamiento viscoso, siendo éste último el caso de la dinámica estructural. La disipación por fuerzas de amortiguamiento viscoso se expresa por la función de disipación de Rayleigh, la cual es una forma cuadrática de las velocidades generalizadas de la forma

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j \quad (3)$$

donde  $c_{ij}$  son los coeficientes de amortiguamiento, que en la mayoría de los casos, resultan ser términos constantes y simétricos ( $c_{ij} = c_{ji}$ ). Las fuerzas generalizadas  $F(t)$ , las cuales no caen en ninguna de las categorías elásticas o de amortiguamiento, son obtenidas por la expresión del trabajo virtual

$$\delta W = \sum_{i=1}^n f_i \delta y_i \quad (4)$$

Recordemos que las fuerzas generalizadas pueden ser funciones del tiempo y no necesariamente funciones de los desplazamientos y/o las velocidades generalizadas.

La lagrangiana del sistema resulta ser

$$L = T - V \\ L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j - V(y_1, \dots, y_n) \quad (5)$$

De esta última fórmula notemos que  $L$  es función de  $2n$  variables formadas por las posiciones y velocidades generalizadas

$$L = L(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n).$$

Además, las ecuaciones de movimiento se obtienen de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} = f_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

De la ecuación (6), se obtienen n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, no-homogéneas y no-lineales. Queremos establecer la ecuación matricial (1). Para ello haremos lo que frecuentemente se hace en estos casos, y consiste en *linealizar* alrededor de un punto o posición de equilibrio estable. En los puntos de equilibrio se anulan todas las fuerzas generalizadas que actúan en él, y en este caso las velocidades generalizadas valen cero, por lo que el sistema seguirá en equilibrio indefinidamente.

Una posición de equilibrio se dice estable, cuando una pequeña perturbación del sistema respecto al equilibrio sólo de lugar a un pequeño movimiento limitado en torno a la posición del reposo. Matemáticamente, esto equivale a decir que en los puntos de equilibrio, el potencial V es mínimo. Para ello, supongamos que se perturba el sistema (en este caso, la estructura), respecto al equilibrio, por medio de un aumento dE de energía por encima de la energía de equilibrio. Si V es un mínimo en el equilibrio, cualquier desviación respecto a esta posición dará lugar a un aumento de la energía potencial V. En virtud de la conservación de la energía, las velocidades deberán disminuir, por lo que el sistema se moverá alrededor del punto de equilibrio y así el movimiento será limitado.

Por esta razón, los puntos de equilibrio estable se caracterizan por satisfacer las ecuaciones (Goldstein, 1963):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y_i} &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \dot{y}_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

Puesto que aquí estamos considerando puntos de equilibrio estable del sistema, luego estamos hablando equivalentemente de puntos

$$y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n}, \dot{y}_{01}, \dots, \dot{y}_{0n})$$

donde el potencial V alcanza su mínimo. Sin pérdida de generalidad, a través de una traslación, dicho punto de equilibrio estable será el punto  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ , es decir

$$y_0 = 0$$

Trayendo un teorema del cálculo de varias variables (Bartle, 1980), tenemos el siguiente hecho:

Si el potencial V tiene un mínimo relativo en el punto  $y_0$ , entonces necesariamente la siguiente matriz es semidefinida positiva en el punto  $y_0$  (Ecuación (8)):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_1} \Big|_{y_0} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} \Big|_{y_0} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_n} \Big|_{y_0} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_2 \partial y_1} \Big|_{y_0} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_2 \partial y_2} \Big|_{y_0} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial y_2 \partial y_n} \Big|_{y_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_n \partial y_1} \Big|_{y_0} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_n \partial y_2} \Big|_{y_0} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial y_n \partial y_n} \Big|_{y_0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Esto será un hecho fundamental, pues en el caso que estamos desarrollando, dicha matriz será ni más ni menos que la matriz de rigidez K de la estructura, por lo que sabemos desde ahora que K es semidefinida positiva, es decir, cumple que  $Y^t KY \geq 0$  para todo vector  $Y \neq 0$ , con  $Y^t$  la matriz transpuesta.

En el modelo planteado estamos considerando que la estructura se comporta "localmente", es decir, toda su dinámica se desarrolla alrededor del o los puntos de equilibrio estable. Matemáticamente esto equivale a que podemos realizar un desarrollo local de Taylor del lagrangiano (5) (en una vecindad) alrededor del punto de equilibrio, removiendo aquellos términos de mayor orden que el cuadrático (Ecuación (9))

$$\begin{aligned} L &\cong L(y_0) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial y_i} \right) \Big|_{y_0} y_i + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \Big|_{y_0} \dot{y}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_j} \right) \Big|_{y_0} y_i y_j \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right) \Big|_{y_0} \dot{y}_i \dot{y}_j \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $y^0 = (y_{01}, \dots, y_{0n}, \dot{y}_{01}, \dots, \dot{y}_{0n}) = 0$  es el punto de equilibrio alrededor del cual se está haciendo el desarrollo local de Taylor.

Notemos que de (7), las velocidades generalizadas,  $(\dot{y}_{01}, \dots, \dot{y}_{0n})$  son todas cero, por el supuesto hecho de arriba, con lo cual  $y_0 = 0$ .

Ahora bien, como la energía cinética T está dada por la relación (2), luego no contiene términos lineales ni constantes en las velocidades generalizadas, así

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \Big|_{y_0} = m_{ij}$$

También de la ecuación (7),

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right|_{y_0} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_j \Big|_{y_0} = 0$$

Como  $T$  no depende de las posiciones generalizadas, entonces sus derivadas parciales con respecto a ellas son cero.

Por otro lado tomando en cuenta que la energía potencial tiene un extremo en los puntos de equilibrio, se tiene que

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y_i} \right|_{y_0} = 0.$$

Puesto que  $V$  no depende de las velocidades generalizadas, las derivadas parciales de  $V$  respecto a ellas son cero. De todo lo anterior se sigue el sistema (10)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L}{\partial y_i} \right|_{y_0} &= \left. \frac{\partial(T-V)}{\partial y_i} \right|_{y_0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y_i} \right|_{y_0} - \left. \frac{\partial V}{\partial y_i} \right|_{y_0} = 0, \\ \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right|_{y_0} &= \left. \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{y}_i} \right|_{y_0} = \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right|_{y_0} - \left. \frac{\partial V}{\partial \dot{y}_i} \right|_{y_0} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{y_0} &= \left. \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial L}{\partial y_j} \right|_{y_0} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} &= \left. \frac{\partial^2(T-V)}{\partial y_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} = - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} \\ \left. \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} &= \left. \frac{\partial^2(T-V)}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} = m_{ij} \end{aligned} \quad (10)$$

Otro tanto pasa si definimos las constantes

$$k_{ij} = k_{ji} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{y=y_0} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_j \partial y_i} \right|_{y=y_0}$$

$\forall i=1, \dots, n$ ; estas constantes definen las entradas de la matriz simétrica  $n \times n$   $K=[k_{ij}]$  llamada la matriz de rigidez. De hecho, por el teorema mencionado anteriormente, esta matriz es semidefinida positiva.

En definitiva, los valores encontrados en (10) nos dicen que el desarrollo local del lagrangiano en (9) alrededor del punto de equilibrio estable es:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} y_i y_j. \quad (11)$$

donde  $L(y_0)$  es una constante que podemos despreciar.

Antes de continuar con la deducción de la ecuación (1), cabe resaltar la existencia de otra matriz simétrica  $n \times n$  formada por los coeficientes  $c_{ij}$  de la función de Rayleigh (3),  $C=[c_{ij}]$ , llamada la matriz de amortiguamiento. De hecho, note que los coeficientes de la función de Rayleigh admiten la relación  $c_{ij}=c_{ji}$ , de donde

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y=y_0} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{y}_j \partial \dot{y}_i} \right|_{y=y_0}$$

Recapitulando, la energía cinética dada por la fórmula cuadrática (2), define la matriz simétrica definida positiva de masa, y la función de disipación de Rayleigh (3) define la matriz simétrica de amortiguamiento. En cuanto a la matriz de rigidez  $K$ , ésta proviene de la energía potencial  $V$ .

Finalmente, tomando en cuenta la expresión de la lagrangiana en una segunda aproximación, dada por la ecuación (11), la ecuación de Euler-Lagrange (6) deviene en el conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo grado:

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} \ddot{y}_j + c_{ij} \dot{y}_j + k_{ij} y_j) = f_i \quad (12)$$

que en notación matricial equivale a la ecuación matricial (1)

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = F(t)$$

Una vez más hacemos énfasis en el hecho de que las matrices son reales y simétricas. Además la matriz  $K$  es semidefinida positiva.

## CONCLUSIONES

## REFERENCIAS

El principio de Hamilton no nos proporciona teoría física nueva alguna, pero nos permite unificar satisfactoriamente muchas teorías separadas, partiendo de un postulado fundamental sencillo. El objetivo de la física no es únicamente dar una formulación matemática precisa para los fenómenos observados, sino también describir sus efectos con ahorro de postulados fundamentales y de la manera más unificada posible. Dentro de ello, el Principio de Hamilton, el cual nos proporciona las ecuaciones de Lagrange, constituye uno de los más elegantes y de mayor alcance de la física.

Para poder evitar algunas complicaciones que se presentan en los tratamientos newtonianos, existen otros procedimientos, como el explicado anteriormente y aplicado a las ecuaciones del análisis estructural. Las ecuaciones de Lagrange describen correctamente a las ecuaciones planteadas por Newton, dando otro tipo de herramienta matemática. Con el paso del tiempo, antes nuevos modelos físicos, surgían nuevos inconvenientes, y por lo tanto, una nueva herramienta matemática para su descripción. El principio variacional, surge como una extensión al cálculo, describiendo fenómenos ya conocidos y explicando algunos nuevos. El formalismo lagrangiano complementa al ya dado por Newton; la mecánica analítica aborda fenómenos como la electrodinámica, teoría cuántica de campos, mecánica de fluidos y la misma mecánica clásica, simplificando las ecuaciones diferenciales que se plantean. El hecho de que la energía se mantenga constante en un sistema, es la base fundamental de la mecánica analítica, pero para sistemas no conservativos, esto se vuelve ahora una limitante.

Herramientas matemáticas conocidas como el cálculo de varias variables y el álgebra lineal, permiten con la ayuda de la mecánica analítica poder modelar sistemas en vibración con pequeñas oscilaciones, como son las estructuras que se presentan en la dinámica estructural. El formalismo lagrangiano proyecta aquí, su practicidad y pone en marcha el poder modelar en otra forma algo que ya se sabía desde antes.

- Amazigo, J. C. and Rubinfeld, L. A. (1988). *Cálculo avanzado*. Mc Graw-Hill.
- Bartle, R. G. (1980). *Elements of real analysis*. John Wiley and Son.
- Elsgolts, L. (1983). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Editorial Mir Moscú.
- Fowles, G. R. (1962). *Analytical Mechanics*. Holt, New York.
- Goldstein, H. (1963). *Classical Mechanics*. Ed. Aguilar, Madrid, España.
- Hutton, D. V. (1981). *Applied Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill Inc., United States of America.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1970). *Mecánica*. Ed. Reverté.
- Malaktar, P. (2003). *Nonlinear Vibrations of Cantiliver Beams and Plates*. PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, USA.
- Perignon, F. (2004). *Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires*. Phd thesis, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II.

# LOS PARADIGMAS EN EL CÁLCULO INTEGRAL: UN ACERCAMIENTO A SUS IMPLICACIONES CONCEPTUALES Y DIDÁCTICAS

Pedro T. Ortiz y O.<sup>1</sup>, Patricia Gpe. Sánchez I.<sup>1</sup>,  
Pedro A. Guadalupe O.<sup>2</sup>

## RESUMEN

*En este ensayo se analiza la formación de las ciencias, el caso particular de las matemáticas, bajo el contexto histórico y epistemológico con el fin de determinar los paradigmas que se encuentran implícitos en el desarrollo conceptual del Cálculo Integral, para que al caracterizarlos dentro del contexto apropiado, se pueda analizar la forma en que repercuten para la formación de las primeras ideas del cálculo y su proceso didáctico, lo anterior probablemente permita conocer si existe obstáculos epistemológicos y por qué impiden alcanzar un aprendizaje efectivo.*

**Palabras clave:** Historia, Epistemología, Cálculo Integral, Cognición.

## ABSTRACT

This essay analyzes the formation of sciences, the particular case of mathematics, under the historical and epistemological context in order to determine the paradigms that are implicit in the conceptual development of Integral Calculus, so that by characterizing them within the context appropriate, it is possible to analyze the way in which they affect the formation of the first ideas of the calculation and its didactic process, this probably allows to know if there are epistemological obstacles and why they prevent achieving an effective learning.

**Keywords:** History, Epistemology, Integral Calculus, Cognition.

## INTRODUCCIÓN

Al tener un conjunto de conocimientos sobre los conceptos e ideas que han surgido de una ciencia o una técnica, se puede identificar si hay elementos que no son parte de la formalización pero que inciden en el entendimiento general, teniendo como elemento el entorno y el lugar histórico, lo cual genera diversas temáticas y perspectivas de análisis, que pueden contener una implicación didáctica.

Existen diversos procesos de elaboración y transformación de las teorías y el conocimiento (D'Amore, 2002), en las que se puedan analizar la génesis histórica y epistemológica a fin de establecer una conexión entre diversos elementos, principios e hipótesis conceptuales, al conocer la forma y el entorno en que se desarrollan. De este análisis se puede encontrar el conjunto de conceptos que sean comunes dentro de una representación lógica y ordenada, de manera que sea posible obtener repercusiones educativas.

Para desarrollar esta construcción objetiva se puede usar a las matemáticas, por ser la ciencia en la que a través de un proceso cuantitativo de la realidad se conduce al establecimiento de un lenguaje común, involucrando ideas desarrolladas dentro de una estructura que representan relaciones de tipo lógico y verdadero.

Para desarrollar el lenguaje científico, las matemáticas necesitan de una visión y una perspectiva que permitan manejar el panorama en forma general. A manera de comparación sería el observar un valle desde la perspectiva de una montaña, debe existir la capacidad de desarrollar el camino que conduzca a puntos específicos del valle, que en muchos casos serán de naturaleza muy particular.

Al tener que desarrollar diversos caminos se focaliza la atención en ciertas regiones o áreas, lo que im-

<sup>1</sup> Profesores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas. Email: ptoyomx@yahoo.com; sancheziturbe@yahoo.com.mx;

<sup>2</sup> Profesor, ITM. Email:portiz130@gmail.

plica la especialización para descubrir los recovecos de los conocimientos y por lo tanto la necesidad de explicarlos con el uso del lenguaje cada vez más especializado y abstracto. Así los conceptos serán idealizados de manera que se tengan que definir algunos elementos matemáticos, como por ejemplo, el punto, la línea o el área.

Los principios básicos de las matemáticas están en consonancia con la representación abstracta de la realidad, en una dualidad de interpretar y formalizar. Para la interpretación se utilizan recursos como la formación de las relaciones conceptuales en términos de elementos básicos, símbolos y su composición.

Al formalizar los elementos básicos de las matemáticas esta se desarrolla con relaciones en forma de axiomas, postulados, teoremas, usados para construir el andamiaje de las matemáticas.

Las conclusiones del saber matemático se representan como componentes que integran el gran edificio de las matemáticas que se construye de diferentes entidades, y que desarrollan, el número, la cantidad, la forma, la dimensión, cambio, movimiento, incertidumbre y la aleatoriedad.

Para realizar el análisis de estos temas es necesario según D'Amore (2008), definir una perspectiva del entendimiento histórico que permita acercarse críticamente a los principios, las hipótesis, las conclusiones en términos de definir el valor y su objetividad, con el fin de conocer las teorías y leyes para entender el crecimiento del conocimiento científico y su interrelación con el mundo social y económico.

En el análisis de estas interrelaciones, se puede aplicar la epistemología, que se considera como una disciplina avocada al estudio del saber científico, sin considerarse una filosofía de la ciencia, ni una gnosología que considere a la teoría del conocimiento. La epistemología estudia los principios, las hipótesis y las conclusiones a las que llegan diversas ciencias con el propósito de establecer la objetividad y la veracidad del conocimiento en forma crítica.

## DESARROLLO DEL ANÁLISIS

Las ideas fundamentales del cálculo diferencial e integral consisten en variación y acumulación (Imaz y Moreno, 2010); en el caso del cálculo integral, la génesis del concepto de acumulación se encuentra inicialmente en la explicación del cosmos por Dé-

mocrito (460-370 a. C), en Ruiz (2003), para éste filósofo el universo se encuentra formado por elementos fundamentales de carácter inseparable que llamó átomos, palabra que significa justamente inseparable y son eternos, indestructibles e indivisibles. La inmutabilidad de los átomos radica en su solidez, lo que permite que no exista el vacío dentro del átomo, la combinación de átomos y el vacío define la naturaleza de la materia.

Así, los problemas matemáticos, que interesan a Demócrito son de carácter diminuto, por su visión atómica, él mismo representaba a un sólido como la suma de un número infinito de capas planas paralelas unas a otras, muy delgadas y próximas. Esta idea le permitió calcular que el volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma que tiene la misma base y la misma altura

De igual manera, con referencia a Ruiz (2003), Eudoxo de Cnido (390-337 a. C) aplicó el método exhaustivo para hallar el volumen de una pirámide, que consiste en expandir sucesivamente áreas conocidas, como puede ser, el inscribir polígonos regulares en una circunferencia de radio unitario, hasta que se agoten los polígonos y que quede "xhausta", es decir que se confundan con el círculo.

Las ideas matemáticas anteriores, Pickover (2009), fueron desarrolladas de manera sobresaliente por Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.), las cuales quedaron plasmadas en su obra llamada el Método. En esta obra, aparece la exhaustividad, que se basa en la aplicación de la Geometría y la Mecánica, y que básicamente consiste en considerar el peso del sólido formado por elementos infinitesimales y lograr el equilibrio.

De esta forma llegó a encontrar diversos resultados, entre los que sobresale la determinación de volúmenes de segmentos esféricos, segmentos parabólicos y sólidos de revolución. Como aspectos importantes que aparecen en las obras de Arquímedes, están la necesidad de evitar el uso del infinito, y que al aplicar la exhaustividad, es necesario conocer el resultado antes, lo que de manera indirecta conduce a la comprobación, estableciendo así la heurística y el razonamiento del descubrimiento y la demostración.

De manera que la tensión conceptual en la ciencia griega se produjo cuando se discute lo discreto y lo continuo, pues se consideraba que los números y las líneas pertenecían a estratos conceptuales distintos

al estudio de la aritmética y la geometría, donde el número, está asociado a la abstracción, al mundo material, y solo puede aplicarse al estudio de colecciones discretas, por lo que no hay asociación de continuidad relacionada al número.

Por el contrario, cuando se utilizan las proporciones o razones para expresar conceptos relacionados, la unidad ocupa un lugar privilegiado, de esta manera se evita la existencia de elementos infinitesimales lo que permitan resolver paradojas, como la de Zenón, en donde los números son considerados como proporciones numéricas exactas, sin una correlación en todos los casos con longitudes.

## DISCUSIÓN

Se puede considerar que el desarrollo histórico-conceptual del Cálculo integral, pasa por tres períodos o momentos fundamentales: la etapa griega (G), la etapa del renacimiento-ilustración (RI) y la etapa decimonónica (D).

Para caracterizar estos períodos del desarrollo matemático del cálculo, en los que se producen problemas y soluciones dentro de un grupo o comunidad intelectual de científicos, es necesario el uso del concepto de paradigma.

Éste fue propuesto por Kuhn en: La estructura de las revoluciones científicas, donde es representado en forma polisémica, esto es, con diferentes significados. Posteriormente, el paradigma quedó definido por las creencias, las generalizaciones, los valores, las técnicas, los tipos de problemas por investigar, las soluciones típicas, entre otros aspectos en torno a los cuales un grupo de científicos de determinada disciplina participan y desarrollan la producción de sus conocimientos.

Al igual que en la filosofía de las ciencias se han propuesto diversas tipologías epistemológicas, acerca de la construcción, la evolución y el desarrollo del conocimiento. Entre ellos sobresalen el falsacionismo de Popper y los programas de investigación de Lakatos, caracterizados por una tradición racionalista, en la que se considera que la ciencia avanza dependiendo de factores o criterios endógenos de la disciplina científica, en contraste con el concepto de paradigma que toma en cuenta los factores sociológicos y psicológicos de los avances o cambios científicos.

En consecuencia, según Hernández (1998), los

paradigmas tienen cinco componentes que los definen: 1.- Problemas de investigación 2.- Fundamentos epistemológicos 3.- Supuestos teóricos 4.- Propuestas metodológicas y 5.- Proyecciones de aplicación.

Como ya se mencionó, se consideran tres los paradigmas del proceso de desarrollo histórico del Cálculo integral, estos están constituidos por el paradigma griego, el del renacimiento-ilustración, y el decimonónico. Así se pueden examinar los componentes de los paradigmas el conocimiento del cálculo de la siguiente manera:

- 1° El caso griego, que considera que el problema de investigación es hallar áreas o volúmenes de sólidos geométricos, lo que se fundamenta en el materialismo desarrollado por Demócrito, bajo un supuesto de existencia de la inmutabilidad atómica, y que permite desarrollar alternativas de solución usando la exhaustividad.
- 2° El paradigma del renacimiento-ilustración, tiene como problema de investigación la relación acumulación-variación, que se manifiesta en el desarrollo de los infinitesimos conceptualizados por S. Stevin (1548 - 1620), con la teoría de la fusión del número con el continuo, lo que permite establecer propuestas metodológicas del límite, y analizar diversas situaciones científicas y técnicas como las relacionadas con los fluidos y los gases.
- 3° El caso del paradigma decimonónico de la integral, en el que aparece la necesidad de formalizar el concepto de límite mediante el paso de la argumentación geométrica a la aritmética y que tiene como fundamentos el análisis aritmético, bajo un supuesto teórico de establecer un número racional independiente del límite y el análisis de sucesiones, que conducen a la definición del límite  $\varepsilon$ - $\delta$ , lo que llevará a una formalización del cálculo en la solución de problemas científicos.

López (1990) señala que categorizar los paradigmas, permite establecer una comparación con el proceso cognitivo de aprendizaje de los estudiantes, sobre todo con las personas que aprenden por primera vez el Cálculo integral.

El paradigma desarrollado en Grecia, se aplica conceptualmente en los estudiantes actuales, identificando a la integral como la suma de un conjunto de capas paralelas que forman el volumen de un só-

lido, de tal manera que integran la forma volumétrica del cuerpo como una estructura total, semejante a la conceptualización vigente desde Arquímedes hasta Wallis (Prabhu y Czarnocha, citado por Crisóstomo, 2012).

Puede visualizarse la existencia de un obstáculo al considerar a la integral definida en la forma del límite de una suma, pues la imagen formada conceptualmente corresponde a la idea del área bajo la curva, desarrollada bajo la consideración de la exhaustividad denotada por Arquímedes.

Cordero (2005), observa que en los procesos de didáctica para desarrollar el cálculo integral, se debe poner de manifiesto, el énfasis en el estudio de la integral desde el punto de vista de la acumulación como noción fundamental y evitar la formalización, que conduce al desarrollo de la suma de Riemann. El mismo autor considera en forma general, que se debe poner un acento muy fuerte en la variación continua, así como en la noción de acumulación y no en los conceptos de derivación o la suma antes mencionada.

En un análisis, Czarnocha, Dubinsky, Loch, Prabhu y Vidakovic (citado por Crisóstomo, 2012), plantean la existencia de un pensamiento atómico de la estructura que forma al espacio, misma que se pone de manifiesto al estudiar la comprensión de la integral en los estudiantes, pues en el proceso de construcción de sus respuestas, siempre consideran la idea de los indivisibles, al estilo que utilizaba Cavalieri, como un elemento fundamental del proceso intuitivo de la construcción de las ideas para analizar el área bajo la curva, que se genera de un objeto de forma irregular.

El uso de las sumas de Riemann quedó fuera de las expectativas de solución de las integrales definidas, pues al parecer nunca se representó como un elemento de la solución espontánea, en el proceso de definir una respuesta.

Es importante señalar que durante la formación histórica del cálculo, se tuvo que apelar al sentido común de lo que pudiera llamarse "situaciones problema", en las que se presenta el reto de hallar el volumen de un sólido o el área de una superficie, y que caracterizaron el periodo inicial de la formación del concepto de integral. El cual tuvo su desarrollo durante el periodo Helénico.

Lo anterior permite considerar que el proceso de construcción del conocimiento no es lineal, sino que se enfrenta a varios obstáculos en su formación, que

podrían llamarse obstáculos epistemológicos.

Esta formación conceptual que se produce en forma espontánea, es manifestada en forma significativa bajo la idea de lo que Reis (2001), llama "una tensión entre el rigor y la intuición", que observó en los profesores de matemáticas durante una investigación centrada en el uso de manuales didácticos y entrevistas estructuradas.

Situación que conduce a analizar propuestas didácticas que permitan hacer fluir la formación de ideas iniciales, de forma intuitiva según su desarrollo histórico, similar a la propuesta de Wenzelburger (citado por Crisóstomo, 2012), que propone seguir la génesis histórica del cálculo para desarrollar un acercamiento que se base en la intuición de los cambios, usando aplicaciones, en las que se desarrollen los elementos básicos de la construcción geométrica de la integral, como el área y el volumen.

Bajo la perspectiva de Turégano (citado por Crisóstomo, 2012), el bajo rendimiento de los estudiantes universitarios y de bachillerato, en el cálculo tiene tres vertientes fundamentales, definidos por los planos psicológicos, didáctico y epistemológico.

En otro análisis Turégano (1998), llega a la conclusión que la revisión de la formación histórica debe ser fundamental para la comprensión del cálculo de manera que debe existir preferentemente un desarrollo en la secuenciación de los contenidos y la formación de los conceptos, en menoscabo del orden lógico, cuando se desarrolla el establecimiento de la seriación de los contenidos, a fin de que se logre una formación de los conceptos por la solución de problemas en los que se involucren el desarrollo histórico del cálculo.

El autor anterior propone la secuenciación curricular para iniciar el curso del cálculo, por el estudio de la integral definida, en términos de la formación auténtica del cálculo, con una total independencia de los conceptos de límite y de la diferencial, usando el contexto de la solución de problemas en los que se presenten la exhaustividad Arquimédica y los indivisibles de Cavalieri.

Para llegar a estas conclusiones consideró dos etapas en la formación en los estudiantes, en la primera, se dirigió hacia el desarrollo de un modelo matemático en términos de la integral definida y la siguiente fue el estudio de las imágenes conceptuales de la integral definida después de una etapa de aprendizaje del modelo desarrollado.

Sin embargo, una aproximación a la didáctica del paradigma basado en el cálculo decimonónico, en donde el rigor de la formalización es elemento fundamental, se puede encontrar en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación, como lo considera seminalmente, la investigación de Scucuglia (2006), en la que manifiesta que la formación conceptual de la suma de Riemann y de la integral, que se relacionan con el Teorema fundamental del cálculo, se logra desarrollar en forma de demostración, por medio de la intuición y las notaciones que simplifiquen la idea. Esto es el paso al rigor axiomático, que se produce después de discusiones de los procesos relacionados con la deducción, y la aplicación formal de la simbología y que se realiza posteriormente al uso de la calculadora que gráfica en forma experimental para el desarrollo del pensamiento en estudiantes de cálculo en el nivel universitario.

### CONCLUSIONES

El categorizar el desarrollo histórico del cálculo a través de tres paradigmas fundamentales permite identificar elementos nodales en el proceso de construcción conceptual de la integral, las tres ideas: la exhaustividad, los indivisibles y el límite.

La exhaustividad se desarrolló con elementos fundamentales de la intuición cotidiana, a partir del atomismo de Demócrito, quien consideró que existe un elemento fundamental en la formación de los objetos, llamado átomo. Por lo que la construcción de los objetos se basa en la acumulación de estos en forma desordenada y si se requiere una visión macroscópica, en capas uniformes.

Esta idea fue aplicada sistemáticamente por Arquímedes y está presente en diversos escenarios para la determinación de los volúmenes y las áreas en forma intuitiva, como lo manifiestan las investigaciones sobre la integral. En la era contemporánea, también está presente en la cotidianidad del salón de clases en donde se desarrolla el aprendizaje de la integral, pues el profesor recurre a elementos conocidos como las rebanadas, los rectángulos, los discos o cualquier otro objeto que se ajusten a un área o volumen para transmitir el concepto de la integral definida.

Se puede reconocer que cuando se usan los elementos geométricos por medio de la analogía, se desarrolla un entendimiento muy significativo en

la comprensión de la integral, lo que permite una transferencia casi inmediata de la idea, lo cual va en beneficio de la didáctica del concepto.

Otra consideración es que la presencia de los elementos representativos del concepto de integral entran en juego cuando se plantea un problema, en el que la capacidad de interpretación y análisis se realiza en forma inmediata por la existencia de componentes representativos, que se dan la forma visual de la idea o el concepto de se estudia.

Siguiendo el desarrollo histórico del concepto de integral la aparición de la idea de los indivisibles con Cavalieri, vino a darle un nuevo impulso al proceso de la construcción de integral, pues puso en discusión la idea de realizar el análisis del proceso de integración bajo la consideración de una analogía de elementos conocidos, con otros que se quieren conocer bajo una perspectiva analógica de la realidad, además preparó el terreno para la aparición de los infinitesimales como herramienta de construcción matemática de la integral.

El tránsito hacia la idea de que un incremento o parte de realidad "discretizada" sea visible u observable en el proceso de integración, como lo es en el proceso de la exhaustividad, a una idea llamada infinitesimal, considerado como un elemento meramente conceptual, genera cierta desconfianza en la capacidad de comprensión, como se señala en la historia y también didácticamente en el salón de clase, pues ese proceso lleva implícita la idea de una transformación que no puede ser explicada en términos de una analogía real.

Sin embargo, el concepto de integral construida de esta manera, tiene algún significado para los estudiantes según se ha observado en diferentes estudios realizados, Cordero (2005), Imaz C y Moreno (2010), Reis (2001), que corresponden históricamente a las ideas desarrollada por los contemporáneos de Newton y Leibniz, que obtenían resultados en forma algorítmica, sin poder explicar sus fundamentos.

El proceso de la representación formal de la integral, se complica con la aparición de los infinitesimales, puesto que en cierto sentido se pierde contacto con la realidad y se empieza a trabajar con la imaginación y, de alguna manera se debe justificar este proceso de construcción mental con elementos racionales para poder extender su capacidad de explicación de su construcción, para esto se utiliza la

lógica, con el fin para sustituir a la intuición en el proceso de formalización del rigor matemático.

Así la construcción del concepto paradigmático del límite alcanza una refinación inigualable en el uso de convencionalismos propios de la época positivista, que es la utilización del método científico en construcción del "edificio científico", usando la lógica y los métodos rigurosos de demostración, que avanzan en la justificación formal pero que pierden contacto con la interpretación de la realidad.

En esta etapa histórica, el siglo XIX, queda ya definido en forma estricta el concepto de integral que viene a generar diversos problemas de comprensión y entendimiento del significado de la integral misma en los estudiantes y que siempre ha generado problemas de tipo didáctico.

Sin embargo la aparición de las tecnologías abre una veta de exploración muy grande en el proceso de repensar las estrategias didácticas que permitan la construcción de aprendizajes más significativos en la construcción del paradigma de la formalización de la integral.

Las tecnologías incrementan la capacidad de la comprensión de la realidad, pues en sus procesos de representación audiovisual, permiten usar la creatividad de la imaginación para reinterpretar la realidad en forma poliédrica, con un control de proceso de construcción simbólica, lo que permite una disección de la lógica y la formalización en elementos significativos para la comprensión de ideas y conceptos abstractos.

De esta manera la didáctica del cálculo tendrá el reto de construir significados que se adapten al desarrollo histórico, pero con la gran ventaja de contar con el apoyo de los elementos tecnológicos que le den significado y faciliten la comprensión de las ideas y conceptos de difícil construcción mental en los estudiantes, y que ésta situación evolucione de forma radical y en beneficio del mejor entendimiento de una herramienta científica formidable como es el cálculo.

#### REFERENCIAS

- Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Relime*, 8(3), 265-286.
- Recuperado el 12 de mayo del 2016 en: <http://www.redalyc.org/pdf/335/33508303.pdf>
- Crisóstomo, E. (2012) Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Recuperado el 5 de mayo del 2016 en: [http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis\\_doctorales/Edson\\_Crisostomo\\_tesis.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Edson_Crisostomo_tesis.pdf)
- D'Amore B., (2002). La didáctica de la matemática como epistemología del aprendizaje matemático.
- Recuperado el 4 de febrero de 2016 en: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewFile/158/292>
- D'Amore B., (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de la enseñanza. Vol.17, n°1, 87-106.
- Recuperado el 31 de marzo de 2015 en: <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/655%20Epistemologia%20didactica%20y%20practicas.pdf>
- Hernández G., (1998). Paradigmas en psicología de la educación. México: Editorial Paidós
- Imaz C., y Moreno, L. (2010). Génesis y la enseñanza del cálculo. México: Editorial Trillas.
- López F., (1990). Epistemología y didáctica de las ciencias. Un análisis de segundo orden. 8(1), 65-14.
- Recuperado el 11 de enero del 2016 en: <http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/51294/93040>
- Pickover C., (2009) De Arquímedes a Hawking. España: Editorial Crítica.
- Reis, F. (2001). A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tesis doctoral. Universidad de Campinas, Brasil: Recuperado el 23 de abril del 2018 en: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/243>
- Ruiz A., (2003) Historia y filosofía de las Matemáticas. Costa Rica: Recuperado el 26 de julio del 2017 en: [http://www.cimm.ucr.ac.cr/wordpress/?page\\_id=427](http://www.cimm.ucr.ac.cr/wordpress/?page_id=427)
- Scucuglia, R. (2006) A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadora gráfica. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista. Recuperado el 22 de diciembre del 2015 en [http://www.rc.unesp.br/gpi-mem/downloads/dissertacoes/scucuglia\\_r\\_me\\_rcla.pdf](http://www.rc.unesp.br/gpi-mem/downloads/dissertacoes/scucuglia_r_me_rcla.pdf)
- Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en un contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias*, 16 (2): 233-249. Recuperado el 12 de diciembre del 2015. en: <https://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v16n2/02124521v16n2p233.pdf>

## USO DE LA CALCULADORA GRAFICADORA Y SENSOR DE MOVIMIENTO COMO MEDIADOR EN EL APRENDIZAJE DE LA CONSTANTE DE GRAVEDAD Y EL PÉNDULO SIMPLE

Hipólito Hernández P.<sup>1</sup>, Edgar J. Morales V.<sup>1</sup>

### RESUMEN

*El presente trabajo da cuenta de los problemas que enfrentan los estudiantes cuando abordan problemas en movimientos uniformemente variados y usan el valor de la gravedad ( $g$ ), una constante que no tiene significado para los estudiantes ya que en el contexto escolar se maneja como un simple número. Para resolver el problema, se utilizó un marco teórico y metodológico, como la ingeniería didáctica, para diseñar la situación didáctica. Además, se utilizó la calculadora graficadora y sensor de movimiento como mediador, para lograr que los estudiantes aprendieran este valor de la gravedad ( $g$ ), de modo que el alumno experimente un proceso de enseñanza-aprendizaje en una forma lúdica, participativa y de investigación, diferente de la enseñanza tradicional, es decir, a la exposición del maestro.*

**Palabras clave:** Movimiento, calculadora graficadora, situación didáctica, aprendizaje significativo.

### ABSTRACT

The present work gives an account of the problems faced by students when they approach problems on uniformly varied movement and use the value of gravity ( $g$ ), a constant that has no meaning for students

since in the school context it is handled as a simple number. To solve the problem, a theoretical and methodological framework, such as didactic engineering, was used to design the didactic situation. In addition, the graphing calculator and motion sensor were used as a mediator, to achieve student learning of this value of gravity ( $g$ ), so that the student experiences a teaching-learning in a playful, participative and inquiry, different from the traditional teaching, ie, to the teacher's exhibition.

**Keywords:** Graphing, slope, reason of change, graphing calculator.

### INTRODUCCIÓN

Hoy día los educadores e investigadores de distintas disciplinas se encuentran preocupados por el bajo rendimiento académico que tienen los alumnos en los diferentes niveles educativos en el aprendizaje y los significados de la matemática y física. Estas disciplinas son consideradas esenciales para el desarrollo académico de los alumnos, en la cual se presentan diversas dificultades de aprendizaje de sus conceptos (Farías y Pérez, 2010).

De lo anterior, dentro de nuestra práctica docente en el nivel medio superior, observamos la dificultad que presentan los alumnos en reconocer el significado físico que se tiene de la constante de gravedad ( $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ) y en la forma de calcularlo, esta constante solo es vista en los libros de física como un simple valor numérico, al igual que los valores de las constantes de Pi ( $\pi$ ), e (2.7182), valores que solo son memorizados y a veces se olvidan por carecer de significado.

Por lo tanto, de acuerdo al problema señalado sobre el significado de este objeto didáctico ( $g$ ), los alumnos presentan deficiencias en su progreso en niveles escolares superiores, ya que la constante de la gravedad se aborda en temas de física, cálculo dife-

<sup>1</sup> Profesores-investigadores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas. Email: polito\_hernandez@hotmail.com; edgarmvdj@hotmail.com

rencial (Swokowski, 1989) e ingenierías. Esta dificultad de aprendizaje, se debe a los métodos de enseñanza dentro del contexto escolar, del mismo modo que los alumnos no llegan a vincular el valor de la gravedad con su entorno; no solo en la clase de física se usa el valor de la gravedad, sino también en matemáticas. En ambas disciplinas son percibidas por los alumnos como materias duras, rigurosas y formales. Los libros de texto que se utilizan aun con las nuevas modificaciones que se han adjuntado a la reforma educativa de la educación media superior (RIEMS) no facilitan el aprendizaje de cómo calcular el valor de la gravedad. Así también las prácticas experimentales que se realiza en el laboratorio están descontextualizados de lo que se aborda en clases.

De lo antes expuesto, no debemos olvidarnos que hoy en día los estudiantes viven en una era de nuevas tecnologías y de comunicación, es por esto que, como profesores de ciencias exactas debemos proponer nuevas alternativas de enseñanza en el aula, mediante el uso de estas herramientas tecnológicas como apoyo en el aprendizaje de las matemáticas, física y fortalecer la enseñanza de una forma innovadora e interactiva. Desde este punto de vista epistemológico, está el desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y, por otro, el desarrollo de recursos tecnológicos (calculadoras, sensores, computadoras, celulares e internet) como procesos de enseñanza-aprendizaje. De acuerdo con el problema planteado, se generaron las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué contribuciones al aprendizaje se obtienen al calcular el valor de la gravedad con el uso de la tecnología en alumnos de nivel medio superior? ¿Cuáles son las ventajas y desventajas usar la calculadora graficadora y sensor en la enseñanza de la matemática y física?

Así, la tecnología se desarrollada en todos los campos, desde las áreas industriales hasta el hogar, este avance tecnológico no es limitado, sino que también, en el campo de la tecnología educativa se está utilizando, como un agente didáctico que organiza el encuentro entre el sujeto y el entorno que genera perturbaciones en el sistema escolar y puede contribuir significativamente a la comprensión en el aprendizaje de la matemática y física. Por lo que, la presente investigación da cuenta de los resultados obtenidos de los estudiantes a través de la situación didáctica del estudio y cálculo de la constante de la

gravedad ( $g$ ) con ayuda del péndulo simple (modelo físico) y la calculadora graficadora conectada al sensor de movimiento. Cabe señalar que la actividad fue resuelta por estudiantes de nivel medio superior, superior y de posgrado de la Universidad Autónoma de Chipas a partir de la expresión  $T=2\pi\sqrt{l/g}$ , fórmula para calcular el periodo de un péndulo. En el contexto escolar, el valor de la gravedad se proporciona a los estudiantes como un valor establecido y único de  $9.82 \text{ m/s}^2$ , dado en los textos de física.

Por lo tanto, nuestro objetivo fue diseñar e implementar una secuencia didáctica utilizando el sensor de movimiento y la calculadora graficadora antes mencionada, para permitir la significación de la severidad de la constante de gravedad en alumnos de los diferentes niveles educativos antes mencionados. Tanto la matemática como la física tienen gran aplicación en todas las ciencias y en la vida cotidiana, por lo que son indispensables para cualquier sistema educativo (Lluis, 2006). Señalamos que la tecnología puede considerarse una herramienta mediadora para facilitar el aprendizaje de algunos objetos didácticos (constante gravitacional) en los estudiantes, ya que en el caso del valor de la constante de gravedad es un objeto didáctico que tiene diversas aplicaciones, ya que en todo nuestro contexto estamos sometidos a este valor. La gran mayoría de alumnos están inmersos de manera natural y cotidiana con herramientas tecnológicas, por lo que es importante asumir un rol que genere un retorno de conocimiento que les interese en su desarrollo académico y, sobre todo, involucrándolos con situaciones amigables y cotidianas (González y Cantoral, 2014). Los recursos tecnológicos han llegado a las aulas desarrollando situaciones de aprendizaje que refuerzan y replantean los contenidos y métodos de enseñanza. Dentro de nuestra investigación creemos que este tipo de aprendizaje usando calculadoras graficadoras conectadas a sensores de movimiento es nueva forma de aprender matemática y física, ya que es posible interpretar fenómenos físicos del entorno.

Continuando con lo anterior, la herramienta tecnológica permite analizar e interpretar los comportamientos del fenómeno físico por medio de gráficas (Lupiáñez y Codina, 2001). Las gráficas son herramientas de visualización que ayudan a interpretar información de situaciones reales y a comprender los comportamientos de los fenómenos físicos, el cual

provoca un mejor aprendizaje (Suárez y Cordero, 2008).

Es así que, la tecnología puede desarrollar una nueva visión de la matemática y física, como algo interactivo entre el usuario y la computadora, ya que se pueden manipular las construcciones geométricas modificando los objetos en la zona de trabajo, descubriendo nuevos conceptos, generando conjeturas y demostrando teoremas de forma geométrica y numérica (Bainville, 2003).

### METODOLOGÍA

Nuestro marco metodológico está basado en el uso de la calculadora graficadora conectada a un sensor de movimiento bajo principios constructivistas, sin embargo, se encuentra que el uso de esta tecnología en la enseñanza de la matemática, por ejemplo, en Gómez (2015) señala que no es la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin embargo hay indicios de que ella se convertirá paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática, debido a la posibilidad que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos. De lo anterior el uso de estas herramientas abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel) en las que él pueda manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración. En el ámbito educativo no es ajeno a este hecho, pero aún es necesario perseverar y profundizar en las discusiones acerca de cómo ha de llevarse a cabo una adecuada implementación de estas herramientas en el aula, y ver cómo pueden adaptarse a los procesos de enseñanza y aprendizaje. Así también Lupiañez y Codina (2001) nos dicen que los ordenadores, Internet, calculadoras y otro tipo de recursos tecnológicos poseen un gran potencial para la educación en general, y para la educación matemática en particular, pero no debe usarse este potencial como excusa para llevar al aula de matemáticas todo aquello que nos sorprende por su versatilidad. En este sentido, es necesario planificar con detalle qué uso queremos darle: qué competencias queremos y podemos desarrollar con nuestros estudiantes, qué tareas debemos diseñar para conseguirlo, y qué

sistema de evaluación pondremos en práctica para medir ese desarrollo.

### ACERCA DE LA ACTIVIDAD

Para el diseño de la situación didáctica nos apoyamos en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007) uno de los principales investigadores en didáctica de las matemáticas. De acuerdo con Reeve (2009) la teoría de situaciones didácticas se considera una estructura intelectual que se puede utilizar para identificar y explicar las relaciones que existen entre fenómenos observables. La teoría de las situaciones didácticas estudia y modela fenómenos didácticos, permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase planteadas por el profesor. La teoría propone el estudio de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos matemáticos. Su objetivo es la determinación de las condiciones en las que se produce la apropiación del saber por los alumnos donde el investigador debe participar en la producción (o diseño) de las situaciones didácticas que analiza (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza, 2005). Las situaciones didácticas se clasifican en: situación de acción, situación de formulación y situación de validación. En nuestra investigación la situación acción es el primer acercamiento que tiene el alumno con las actividades donde se genera una interacción entre compañeros y el modelo físico. La situación de formulación es el proceso de realizar la actividad de acuerdo a lo que se pretende aprender cuyo objetivo es la comunicación en informaciones entre alumnos. La situación validación el alumno no solo tiene que comunicar una información, sino que también tiene que argumentar lo que él dice es verdadero (Brousseau, 2007). En el trabajo se utilizó como metodología de investigación a la ingeniería didáctica, desde su: análisis preliminar, concepción y análisis a priori de la secuencia didáctica, experimentación, análisis a posteriori, confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. La ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en escena del funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase (Gascón, 2015). La ingeniería didáctica incorpora una visión propia del aprendizaje de la matemática, adoptando una pers-

pectiva Piagetiana cuyo sentido la postula que todo conocimiento se construye por interacción constante entre sujeto y el objeto. Este marco teórico designa un conjunto de secuencias de clase en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos (Anido, 2004). A continuación se describe lo que se espera de la actividad diseñada.

### **Análisis a priori**

Nuestro trabajo como se ha mencionado anteriormente busca significar al objeto didáctico en los estudiantes, esperamos que en todas las actividades los estudiantes logren una mejor comprensión de cómo calcular la constante de la gravedad de forma lúdica, de investigación y colaboración.

### **Experimentación**

La investigación se ha realizado en tres niveles educativos: la primera con 73 estudiantes del nivel medio superior (NMS) agrupados en equipos de 4 integrantes cada uno, ocupando cronómetros de dispositivos móviles; en el nivel superior se realizó la misma puesta en escena con 24 alumnos de ingeniería y en el otro nivel fueron 13 estudiantes de posgrado que: primero usaron cronómetros y posteriormente tecnología como el sensor de movimiento conectado a la computadora gráfica.



Figura 1. Obtención de datos con alumnos de Educación Media Superior, usando cronómetro.

### **Análisis a posteriori**

Los resultados obtenidos después de la recolección y análisis de datos fueron: primero se hace con estudiantes del NMS cuyos dispositivos usados fueron; un péndulo simple y un cronómetro. Se hizo una sola vez la toma de seis muestras; esta toma de datos proporcionó un resultado para el valor de la gravedad de  $10.38 \text{ m/s}^2$ , ver figura 1.

En la segunda parte se realizó con los estudiantes de posgrado; primero con el uso del péndulo y un cronómetro, se hicieron tres repeticiones de cada medición para hacer un promedio de los datos, teniendo como resultado un valor para  $g$  de  $8.4821 \text{ m/s}^2$ ; asimismo, se repitió el experimento con el uso de un sensor de movimiento obteniendo la toma de muestras con el sensor conectado a la computadora gráfica consiguiendo un resultado de  $9.605454 \text{ m/s}^2$ , ver figura 2. Estos resultados son obtenidos con el obstáculo del rozamiento del aire.

Posteriormente los datos obtenidos con este procedimiento se vaciaron en el software Geogebra para obtener la pendiente  $m=T^2/l$  como se muestra en la figura 3. En el eje horizontal van los valores de la longitud de la cuerda y en el eje vertical son los valores del periodo  $T$  al cuadrado ( $T^2$ )

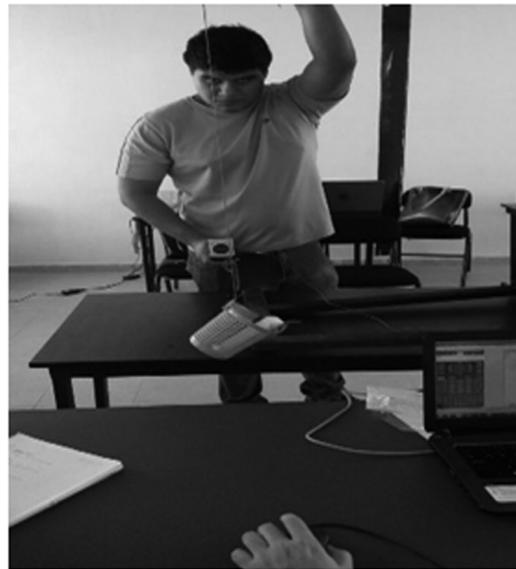


Figura 2. Obtención de datos con el sensor CBR y la computadora gráfica, con estudiantes de posgrado-UNACH.

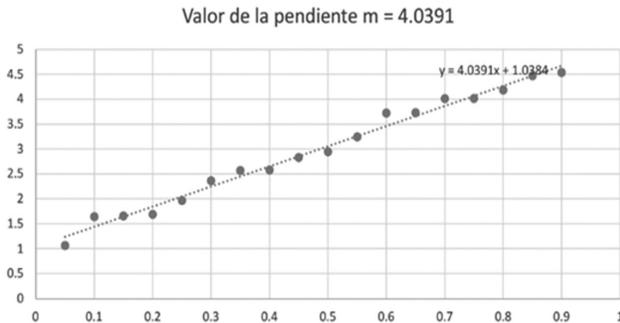


Figura 3. Valores obtenidos para encontrar la pendiente y encontrar la constante de gravedad.

Para los estudiantes de ingeniería obtuvieron un valor de la constante de gravedad de  $9.06 \text{ m/s}^2$ . En tanto que otros grupos obtuvieron un valor de  $g = 9.774 \text{ m/s}^2$ . Los argumentos de los alumnos fueron:

1. El periodo de las oscilaciones que se generaron al mover la botella (masa) de su punto de equilibrio no dependía ni de su masa ni de su amplitud de movimiento, sino de la longitud de la cuerda a la cual estaba sujeta.
2. El periodo varía porque al ser más corto el hilo el tiempo del periodo es más corto. El valor de la gravedad no varía porque sería la misma que se aplica.
3. Entre más datos minuciosos se logren tomar en este experimento; es decir, longitud, tiempo y periodo de oscilaciones, habrá una mayor posibilidad de encontrar un valor de pendiente que nos ayude a una mejor aproximación al valor de la constante de la gravedad  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  valor que se utiliza actualmente en el Sistema Internacional de Medidas SI mediante la ecuación  $g = (4\pi^2)/m$ , donde  $m$  es la pendiente, en la cuál es otro concepto que se estudia en geometría analítica.
4. Los alumnos de posgrado en matemática educativa argumentaron que con el uso de herramientas tecnológicas computacionales, tal es el caso de Microsoft Excel, se logra visualizar cómo los datos tomados de un experimento pueden repercutir en la elaboración de gráficas y en los elementos que deriven de esto, con la finalidad de alcanzar un cierto objetivo.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A manera de conclusión de esta investigación que se realizó durante tres semestres consecutivos y aun se sigue realizando, se puede señalar que el diseño de la **situación didáctica** con el apoyo de la calculadora graficadora conectada al sensor de movimiento permite un aprendizaje en los estudiantes del problema señalado anteriormente. El argumento anterior se señala debido a que los estudiantes argumentaron que el periodo de las oscilaciones que se generaron al mover el péndulo de su punto de equilibrio no dependía de su masa ni de su amplitud de movimiento sino de la longitud ( $l$ ) de la cuerda a la cual estaba sujeta. Los estudiantes mencionan que con el uso de la calculadora graficadora y sensor de movimiento y el empleo de otras herramientas tecnológicas: permite mejor la toma de datos y se tiene mayor precisión en cuanto a al valor de la constante; el fenómeno de oscilación del péndulo se aprecia más porque la calculadora graficadora permite observar el comportamiento físico en tiempo real del movimiento en tanto su posición, velocidad, tiempo, a diferencia de usar solo cronómetro; entre más tomas de muestras se tengan habrá una mayor posibilidad de encontrar un valor de la pendiente ( $T^2/l$ ) que ayude a mejorar la aproximación del valor de la constante de la gravedad que se utiliza actualmente en el Sistema Internacional de medidas (SI).

Por lo tanto, se concluye en primera que el diseño didáctico y la tecnología usada en esta investigación permite al alumno visualizar de forma amplia las gráficas, observar parámetros tales como el tiempo, velocidad, distancia, aceleración, correlación, análisis de la gráfica en determinadas porciones del comportamiento del fenómeno como sus pendientes, es decir, una actividad de aprendizaje diferente a las clases tradicionales. En segunda con esta actividad didáctica el alumno al tener mayor significado del conocimiento del valor de la gravedad, será capaz de entender su entorno físico, como saber que el fenómeno de la gravedad se involucra en diferentes procesos a decir en la generación de energía eléctrica (hidráulica), energía eólica, el impacto que genera un edificio sobre el suelo, en los procesos del sistema digestivo (movimiento peristáltico), construcción de muros de gravedad, puentes, como afecta la gravedad en los ríos para saber dónde ubicar las presas,

momento flector en vigas, centros de gravedad. Con esta secuencia didáctica, se tiene un aprendizaje significativo y favorece que el estudiante contraste las diferencias entre las creencias de la idea que llega a la clase y las leyes que gobiernan el mundo real, desde este punto de vista el estudiante mejora el grado de aprendizaje conceptual (Ausubel, 1997).

## REFERENCIAS

- Anido, M. (2004). La ingeniería didáctica en el diseño y seguimiento de unidades curriculares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 17 (1), pp. 215-220.
- Ausubel, D. (1997). *Psicología educativa. Un punto de vista activo*. México: Trillas.
- Bainville, E. (2003). *Cabri Geometre II Plus*. Francia. Recuperado el 8 de noviembre de 2017 en: <http://www.cabri.com/es/descargar-cabri-2-plus.html#manuales>.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Zorzal.
- Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Analís, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.
- Farias, D. y Pérez, J. (2010). Motivación en la enseñanza de las matemáticas y la administración. *Formación Universitaria*, 3(6), pp. 33- 40.
- Gascón, J. (2015). Evolución de la didáctica de la matemática como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18 (1), pp. 7-3.
- Gómez, P. (2015). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa* 10, 93-111. Recuperado el 8 de noviembre de 2016 de <http://scholar.google.com/citations?>
- González, A. y Cantoral, R. (2014). Una propuesta de aprendizaje para la pendiente con el uso de Geogebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, pp. 2151 – 2158. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Lluis, E. (2006). Teorías matemáticas, matemática aplicada y computación. *Ciencia Ergo Sum*, 13 (1), pp. 91 – 98.
- Lupiáñez, J. y Codina, A. (2001). Calculadoras y sensores: la matemática en movimiento. *uniandes.edu.co*, 1, pp. 143-149. Recuperado el 8 de noviembre, en [https://scholar.google.es/citations?view\\_op=view\\_citation&hl=es&user=lf9Y4jcAAAAJ](https://scholar.google.es/citations?view_op=view_citation&hl=es&user=lf9Y4jcAAAAJ) Base de datos.
- Reeve, J. (2009). *Motivación y emoción*. México: McGraw-Hill.
- Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación de un ambiente tecnológico. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 3 (1), pp. 51-58.
- Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

# CONSTRUCCIÓN DE UN VISCOSÍMETRO ROTACIONAL PARA FINES DIDÁCTICOS CON ELEMENTOS DE ARDUINO

José G. Pinto<sup>1</sup>, Francisco A. Alonso<sup>2</sup>,  
Jonathan M. Morales<sup>3</sup>

## RESUMEN

*En este trabajo se presenta el diseño experimental de un viscosímetro rotacional (VR) para ser usado con fines didácticos con la finalidad de proponerlo como parte del aprendizaje significativo de la formación integral de los alumnos que cursan la materia de mecánica de fluidos. La implementación del prototipo tiene como finalidad conocer la viscosidad de determinados líquidos Newtonianos de manera experimental, además de comparar los resultados con el modelo comercial Stabinger que es un viscosímetro rotacional con alta precisión comparable a los viscosímetros capilares gravimétricos. La eficiencia del prototipo se llevó a cabo comparando las viscosidades de tres líquidos de referencia con los resultados obtenidos con el prototipo VR y el viscosímetro comercial, después de realizar la Repetitividad y reproducibilidad de las mediciones a temperatura constante, se observó que el VR se ajusta con márgenes de error muy bajos en relación a los valores establecidos por los fabricantes de líquidos y los obtenidos con el modelo comercial. El prototipo solo es capaz de hallar la viscosidad dinámica de los líquidos al mantener constante la temperatura.*

**Palabras clave:** viscosímetro, viscosidad, precisión, arduino.

## ABSTRACT

In this work the experimental design of a rotational viscometer (VR) is presented to be used for didactic purposes, with the goal of proposing it as part of the significant learning of the integral formation of the students of the subject of fluid mechanics. The purpose of the prototype implementation is to know the viscosity of certain Newtonian liquids experimentally, in addition to compare the results with the commercial model Stabinger, which is a rotational viscometer with high precision comparable to gravimetric capillary viscometers. The efficiency of the prototype was carried out comparing the viscosities of three reference liquids with the results obtained with the prototype VR and the commercial viscometer, after performing the repeatability and reproducibility of the measurements at constant temperature, it was observed that the VR is adjusted with very low error margins in relation to the values established by the liquid manufacturers and those obtained with the commercial model. The prototype is only able to find the dynamic viscosity of the liquids by keeping the temperature constant.

**Keywords:** viscometer, viscosity, precision, arduino.

## INTRODUCCIÓN

La viscosidad es aquella propiedad de un fluido por virtud de la cual ofrece resistencia al corte. De todas las propiedades de los fluidos, esta requiere la mayor consideración en el estudio del flujo de fluidos (Streeter L, 1996).

Leonardo da Vinci (1452-1519), propuso una ecuación de continuidad para flujos unidimensiona-

<sup>1</sup>Profesor de tiempo completo y encargado del Laboratorio de Hidráulica. Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas. Email: jpinto19711@hotmail.com.

<sup>2</sup> Profesor-investigador de tiempo completo. Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas. Email: alfa@unach.mx

<sup>3</sup> Estudiante de Ingeniería. Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas.

les. En sus notas dejó descripciones muy reales sobre la teoría de chorros, formación de torbellinos, olas, resaltos hidráulicos, etc.; pero se le atribuye a Isaac Newton (1642-1727) la formulación de las leyes generales del movimiento y la relación lineal de resistencia viscosa para los fluidos newtonianos (la mayoría de los líquidos y los gases). Diez años antes de que Gluglielmini (1655-1710), Newton había cuantificado el efecto viscoso sobre las paredes de los recipientes con el objeto de modelar el movimiento de un vórtice; y lo había hecho postulando que la resistencia que resulta de la falta de deslizamiento entre partículas de un fluido es, en igualdad de otras condiciones, proporcional a la velocidad con la cual las partículas mismas se separan unas de otras. (Levi E, 2001).

La medición de la viscosidad es sin duda de mucha importancia para el estudio de los fluidos. Existen en el mercado diversos instrumentos que van desde los que tienen componentes sencillos hasta aquellos que incluyen elementos digitales con sensores adaptados a interfaces con las computadoras personales. En este trabajo se presenta un prototipo de un viscosímetro rotacional (VR) que fue diseñado por un grupo de alumnos que cursaron la materia de mecánica de fluidos en la facultad de Ingeniería de la UNACH, los resultados que se obtuvieron fueron comparados con un viscosímetro comercial rotacional modelo Stabinger de la marca, Thermo Haake; donde se consideró una temperatura constante de 25 °C, para la toma de datos se usó un método de prueba estándar (STM, por sus siglas en inglés) basada en los resultados obtenidos en ensayos múltiples obtenidos por la misma persona. A este respecto se observó que aún se debe trabajar para mantener una velocidad angular constante del cilindro además que se aprecia un ligero cambio en la viscosidad después de que el cilindro gira por un largo periodo, esto se debe principalmente a que la fricción producida cambia la temperatura del líquido.

### Formulación matemática

Haciendo referencia a la figura (1) y teniendo en cuenta la ley de Newton de la viscosidad:

$$\tau = \mu \nabla v$$

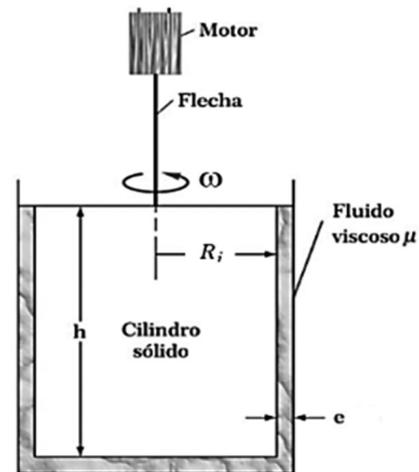


Figura 1. Diagrama básico del viscosímetro

cuya forma unidimensional será:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (1)$$

Donde:

$\tau$ : Esfuerzo cortante.

$\mu$ : Viscosidad dinámica.

$dv/dy$ : Gradiente de velocidad.

Puesto que el cilindro experimenta un momento de giro, es necesario hacer uso de la relación:

$$v = \omega R_i \quad (2)$$

Donde:

$\omega$ : Rapidez angular  $[\frac{rad}{seg}]$ .

$R_i$ : Radio del cilindro interior que está en contacto con el líquido.

Al considerar que  $\tau = \frac{dF}{dA}$  y sustituyendo (2) en (1), se obtiene la expresión para la fuerza en términos diferenciales:

$$dF = \mu \frac{\omega R_i}{e} dA$$

Donde  $e$  es el espesor de la película de aceite.

Al integrar ambos miembros de la ecuación puede observarse que la expresión solo es una función que depende del área que está en contacto con el líquido

$$F = \mu \frac{\omega R_i}{e} \int dA \quad (3)$$

Para el caso de la pared lateral.

$$dA = 2\pi R_i dh \quad (4)$$

Ya que el par motor se define como:

$$dM = R_i dF \quad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (3), se tiene la ecuación del momento lateral:

$$M_L = \frac{2\pi\mu\omega R_i^3 h}{e} \quad (6)$$

Del mismo modo; para la base del cilindro interior:

$$dA = 2\pi R_i dR_i$$

Conduce al momento en la base

$$M_B = \frac{\pi\mu\omega R_i^4}{2e} \quad (7)$$

El momento total es:

$$M_t = M_L + M_B \quad (8)$$

Y despejando  $\mu$  del momento total, se tiene la expresión que define a la viscosidad en el sistema:

$$\mu = \frac{M_t e}{2\pi\omega R_i^3 \left(h + \frac{R_i}{4}\right)} \quad (9)$$

Esta ecuación define la viscosidad del fluido en términos de cantidades conocidas y puede notarse que no incluye a la temperatura; sin embargo es una variable que se encuentra implícita en el fenómeno en estudio y tiene fuerte implicación en la velocidad de giro del cilindro sólido. (Brian C, 2014).

### Materiales y método

El prototipo fue construido con acero inoxidable debido a que este material presenta las siguientes ventajas: resistencia a la corrosión, fácilmente mecanizable, alta resistencia mecánica y excelentes propiedades higiénicas.

El prototipo incluye un elemento hueco al cual se adapta un cilindro cuyo eje está conectado al motor síncrono. Entre ambos cilindros existe una pequeña holgura que ha de ser ocupada por el líquido de prueba. En la figura (2) puede verse la forma como van acoplados ambos cilindros.



Figura 2. Acoplamiento del cilindro interior y exterior.

Una dificultad en el montaje del sistema cilindro-eje fue el efecto de cabeceo al momento de acoplar el motor. Para eliminar y evitar afectaciones en la medición, se adaptaron chumaceras y un mini mandril, lo que permitió tener mayor estabilidad en el momento de giro y lograr una velocidad angular con fluctuaciones de  $\pm 0.02$  en las mediciones de esta variable.

Para el registro electrónico de los datos se requieren los elementos mostrados en la figura (3) para adaptarlos al circuito integrado en la figura (4).

Para que el VR sea capaz de recolectar e interpretar datos para el cálculo de la viscosidad, se usó un micro-controlador y una interfaz, se empleó además un procesador de programación arduino con interfaz de arduino/genuino mega 2560. El Arduino, es una plataforma de hardware libre que permite leer y procesar los datos registrados por el sensor de velocidad angular e imprimir el valor de la viscosidad en la pantalla LCD.

El sensor se usa para conocer la variación de la velocidad angular del motor de corriente directa de 5 V al cual se le adaptó un disco perforado unido al eje, que le sirve al sensor para contar las interrupciones, es decir que al girar, el orificio del disco pasa por la ranura del codificador rotatorio (encoder) que será el dispositivo encargado de convertir la posición angular del eje a un código digital por medio de un pulso digital en el pin D0 en el rango de 0 a 5 Volts, el optointerruptor capta esta información y el arduino procesa este dato. De esta manera se obtienen las revoluciones por minuto de dicho motor. En la figura (5) se observan las partes del sensor, el cual es responsable de contabilizar el número de veces que pasa la ranura del disco a través del sensor e indica las revoluciones por segundo con que gira el conjunto eje-cilindro, ese detalle puede observarse en la figura (6).

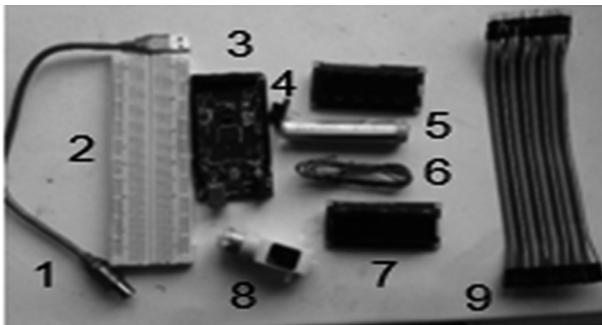


Figura 3. 1. Cable flexible USB 2. Placa de pruebas. 3. Arduino Mega. 4. Optointerruptor. 5. Estaño. 6. Cable estañado 7. Pantalla LCD. 8. Motor DC de 5V. 9. Jumper macho-hembra.

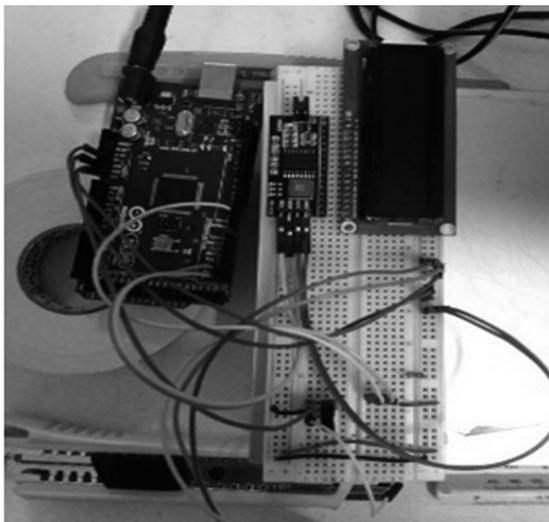


Figura 4. Ensamble de los componentes

En la figura (7) se observan detalles de la forma en que está conectado el sensor con el arduino, el conjunto de ambos elementos es imprescindible en la interpretación del dato de la velocidad angular.



Figura 5: 1. Optointerruptor. 2. Luz LED de alimentación. 3. LM393. 4. LED de datos (b) Adaptación del conjunto en el prototipo.

Para el diseño final se adaptaron barras de acrílico en el soporte del motor las cuales permiten absorber las vibraciones ocasionadas por el giro al momento del arranque del motor. Se implementó un sistema de rieles que consta de cuatro tornillos ajustables, con la finalidad de facilitar el descenso del soporte móvil y conservar un nivel fijo al momento de la medición. Finalmente el acabado del prototipo fue en aluminio, ya que facilita su limpieza y contribuye en la estética y presentación del mismo. En la figura (8) se aprecian los últimos ajustes necesarios para su correcto funcionamiento.

En la figura (9) se aprecia el diseño final del prototipo (VR).

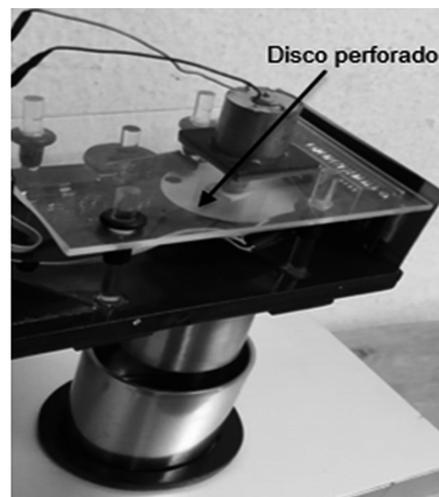


Figura 6: Lectura del sensor al pasar la ranura del disco

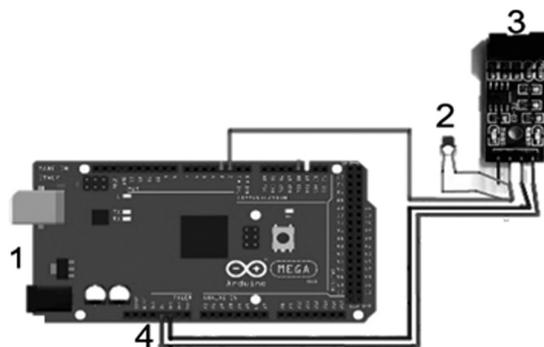


Figura 7: Diagrama de conexión arduino-sensor.  
1. Arduino. 2. Resistencia 220 Ohm 10 % resistencia. 3. Sensor. 4. Jumper.

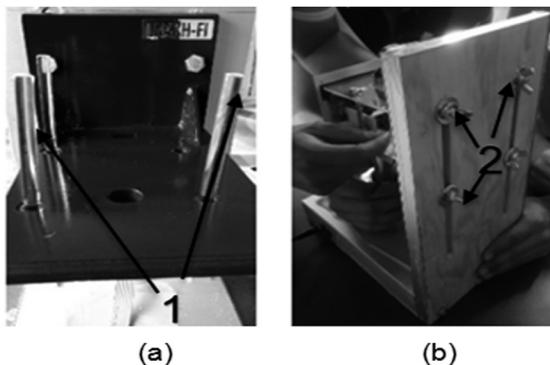


Figura 8. (a) 1. Barras estabilizadoras de acrílico. (b) 2. Acoplamiento de rieles.

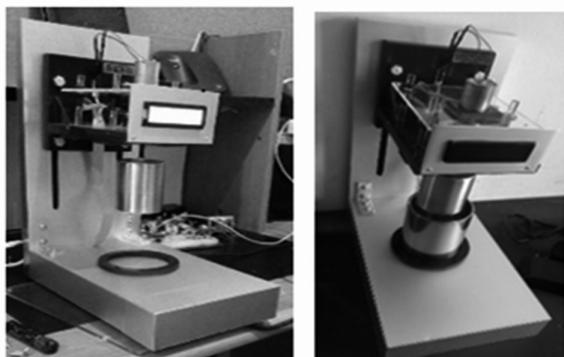


Figura 9. Imagen del prototipo terminado.

## RESULTADOS

La validación de los resultados del prototipo consistió en comparar los valores de las viscosidades de los líquidos de referencia con los calculados con los modelos Stabinger y VR. Las fuentes de incertidumbre consideradas en la repetitividad de las mediciones fueron principalmente, el observador (responsa-

ble de la toma de datos), condiciones internas del laboratorio, la velocidad de giro del instrumento y el tiempo de duración de la prueba, a fin de controlar la temperatura la cual tiene una fuerte influencia en la viscosidad de los líquidos. Un aumento en la temperatura resulta una disminución de la viscosidad y viceversa (es una propiedad de los líquidos). Según Simón G. R (2009), la diferencia de temperaturas entre una medición y otra no debe superar los 0.50C. La estimación de la incertidumbre se basó en el método propuesto por la Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (1995) y en Schmid W., Lazos (2000). Los resultados obtenidos, se presentan en la tabla (1).

Tabla 1. Porcentaje de error al comparar las viscosidades dinámicas con el modelo VR. 4Valores tomados en (Langer's Handbook of Chemistry, 1999).

Líquido de referencia	$\mu_{referencia} (Pa.s)$	$\mu_{mod VR} (Pa.s)$	% Error
Miel Karo <sup>1</sup>	2.248	2.200	2.135
Glicerina <sup>1</sup>	0.858	0.804	6.293
Aceite SAE 5W-20 <sup>1</sup>	0.070	0.073	4.286

Tabla 2. Porcentaje de error al comparar las viscosidades dinámicas con el prototipo VR. Valores tomados del viscosímetro Stabinger.

Líquido de referencia	$\mu_{Stabinger} (Pa.s)$	$\mu_{mod VR} (Pa.s)$	% Error
Miel Karo	2.264	2.200	2.826
Glicerina	0.860	0.804	6.511
Aceite SAE 5W-20	0.076	0.073	3.947

En la tabla (2) se presentan los resultados experimentales con el modelo VR y los obtenidos con los dispositivos comerciales.

En la figura (10) se muestran los resultados obtenidos con el viscosímetro Stabinger y el prototipo VR.

## DISCUSIÓN

Se observa que existe un error ligeramente apreciable al comparar los datos de las viscosidades obtenidas en la experimentación. En todo el proceso de



Figura 10. Valores obtenidos con el viscosímetro Stabiger y los obtenidos con el modelo VR.

medición se controla una temperatura constante de 25 °C. Como puede notarse en los resultados de la Tabla 1, es en la glicerina donde se observa el mayor error, y esto se debe posiblemente a efectos de adherencia de dicha sustancia a las paredes del cilindro. Se aprecia un efecto singular al experimentar con líquidos muy viscosos, y es que al llenarse el cilindro e iniciar el movimiento de giro; se debe esperar que el movimiento se estabilice hasta lograr una velocidad constante. Contrario a esto, se observó que en líquidos poco viscosos como el agua y alcohol existe un pequeño derrame de líquido al inicio de la prueba, efecto que es controlado considerando evitar llenar por completo el depósito.

Lo anterior, sugiere que debe existir un control al momento de realizar cada uno de los ensayos en el que es necesario cuidar la cantidad de sustancia y el nivel de descenso del cilindro interior, además de considerar también los efectos que la temperatura tendrá en el instante de la prueba de manera que estas se realicen bajo las mismas condiciones o en su caso realizar las estimaciones correspondientes para valores de la viscosidad a diferentes temperaturas; esta apreciación podrá resolverse en futuras investigaciones.

## CONCLUSIÓN

Hay que tener en consideración que la viscosidad dinámica es el parámetro de interés en el estudio de los fluidos viscosos pero que en algunos casos y en ciertos tipos de viscosímetros se suele emplear la viscosidad

cinemática, ambas viscosidades están relacionadas en función de la densidad relativa. Si la viscosidad y la densidad específica son dinámicas, pero solo una es medida, se producirá un error, y la viscosidad cinemática no proporcionará una valoración precisa del cambio de la viscosidad absoluta del fluido, que es el parámetro de interés. El tamaño del error está en función del tamaño del cambio en el parámetro que no se mide, la densidad específica del líquido que tiene un ligero cambio debido a los efectos de fricción que se producen al interior del fluido. Al respecto, el criterio simple en la reproducibilidad de la medida fue una incertidumbre de 0.50C en el valor de la temperatura.

El VR ha sido construido para que pueda ser de fácil uso y manejo, fue diseñado y reunió la mayoría de los criterios y requisitos establecidos en la planeación de su construcción. La implementación con Arduino permite visualizar los resultados en la pantalla; queda aún pendiente incorporar elementos que controlen la temperatura.

Este trabajo representa un primer esfuerzo en la construcción de un dispositivo para medir la viscosidad, es la puesta en marcha de la creatividad y el interés de los alumnos por entender la teoría a través de la experimentación.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no habría sido posible sin el entusiasmo y dedicación de los alumnos en tiempo y esfuerzo para hacer realidad el sueño de haber ganado el primer lugar en el concurso de creatividad que organiza la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas.

## REFERENCIAS

- Brian Cherrington & Jack Rothstein. (2014). Building and Validating a Rotational Viscometer. Mechanical Engineering, 1,5. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, PIPM,IEC,IFCC, ISO, IUPAP, IUPAC, OILM (1995)
- Jonh A. Dean. (1999). Lange's Handbook of Chemistry. México: Mcgraw-Hill, Inc.
- Levi E. (2001). El agua según la ciencia. México: AMH IMTA.
- Streeter L. Victor, Wyle Benjamin E. (1996). Mecánica de los Fluidos. México, D.F: McGraw-Hill/Interamericana De España, S.A de C.V.
- Schmid W., Lazos Ruben. Guía para estimar la incertidumbre de la medición. Abril 2000. (Guía CNM)
- Simón González Roldán. (2009). Diseño mecánico de un equipo para medida de la viscosidad en fluidos no newtonianos. Cartagena, España: I.T.I. Esp. Mecánica.

## LINEAMIENTOS GENERALES PARA LA PUBLICACIÓN DE ARTÍCULOS

Por acuerdo del Comité Científico y Consejo Editorial de la Facultad de Ingeniería se establecieron los Lineamientos Generales para la publicación de artículos técnicos de la Revista Pakbal. Lo anterior, con la finalidad de normar la metodología para su elaboración y presentación. Los artículos deberán cumplir lo siguiente:

### ARTÍCULOS PROPIOS

*(Reporte de investigación, ensayo, transferencia de tecnología, extensión e innovación tecnológica, etc. máximo 10 cuartillas)*

- **Título en español e inglés.**-No debe ser mayor a 15 palabras y debe describir el contenido clara, precisa y concisa.
- **Nombre de autor y coautores.**- Máximo cuatro integrantes.
- **Resumen.**-Debe incluir los resúmenes en español y en inglés (abstract) de 150 palabras cada uno. En el cual se indique de forma clara y breve el propósito de la investigación, procedimientos básicos, resultados y conclusiones. Evitar uso de abreviaturas y términos especializados.
- **Palabras clave.**- Presentar máximo cinco palabras clave en español e inglés (keywords) y deben aparecer debajo del resumen en la misma página.
- **Abreviaturas.**-Deben ser definidas la primera vez que se mencionan. Si fuera esto en el resumen, entonces debe definirse de nuevo en el cuerpo principal del texto.
- **Introducción y/o antecedentes.**-Indica el preámbulo del contenido.
- **Método o análisis.**-Describe el diseño de la investigación o contenido y se explica cómo se llevó a la práctica, justificando la elección de métodos, técnicas o instrumentos.
- **Resultados.**-Resalta los hallazgos relevantes, presentado en texto, tablas o ilustraciones.
- **Discusión.**-Interpretación de resultados y su significado sobre el trabajo de otros autores.
- **Conclusiones y/o recomendaciones.**- Delimita y precisa el contenido o tema a tratado.
- **Referencias.**- Se incorpora al final del artículo, en orden alfabético todas las obras citadas en el texto y pies de página. El autor debe revisar cuidadosamente que no hay omisiones e inconsistencias entre las obras citadas y la bibliografía. Usar formato APA versión 6
- **Cuerpo del texto:** Letra Arial 11 pts, interlineado sencillo.
- En los artículos deberán referenciarse; tablas y figuras (gráficas, imágenes, fotografías, etc.)
- Numerar el material gráfico (mapas, fotos, gráficos): escala de grises, resolución 300 dpi, en formato JPG, PNG o TIFF.
- El autor del artículo deberá proporcionar su formación académica y correo electrónico.

# OFRECE SUS SERVICIOS EN:

## SERVICIOS DE CONTROL DE CALIDAD



- Análisis de agregados inertes (arena y grava) para concreto hidráulico y mortero hidráulico.
- Cálculo de proporcionamiento
- Pruebas de desgaste
- Ruptura de especímenes de concreto
- Ruptura de especímenes de mortero hidráulico
- Análisis de materiales para terracerías subrasantes
- Análisis de materiales pétreos para revestimiento, sub-bases hidráulicas y carpeta asfáltica (varillas corrugadas de 1", 3/4", 5/8", 1/2", 3/8" y 5/16")
- Ruptura de bloques sólidos, adoquines, etc.
- Estudios destructivos y no destructivos en concreto endurecido

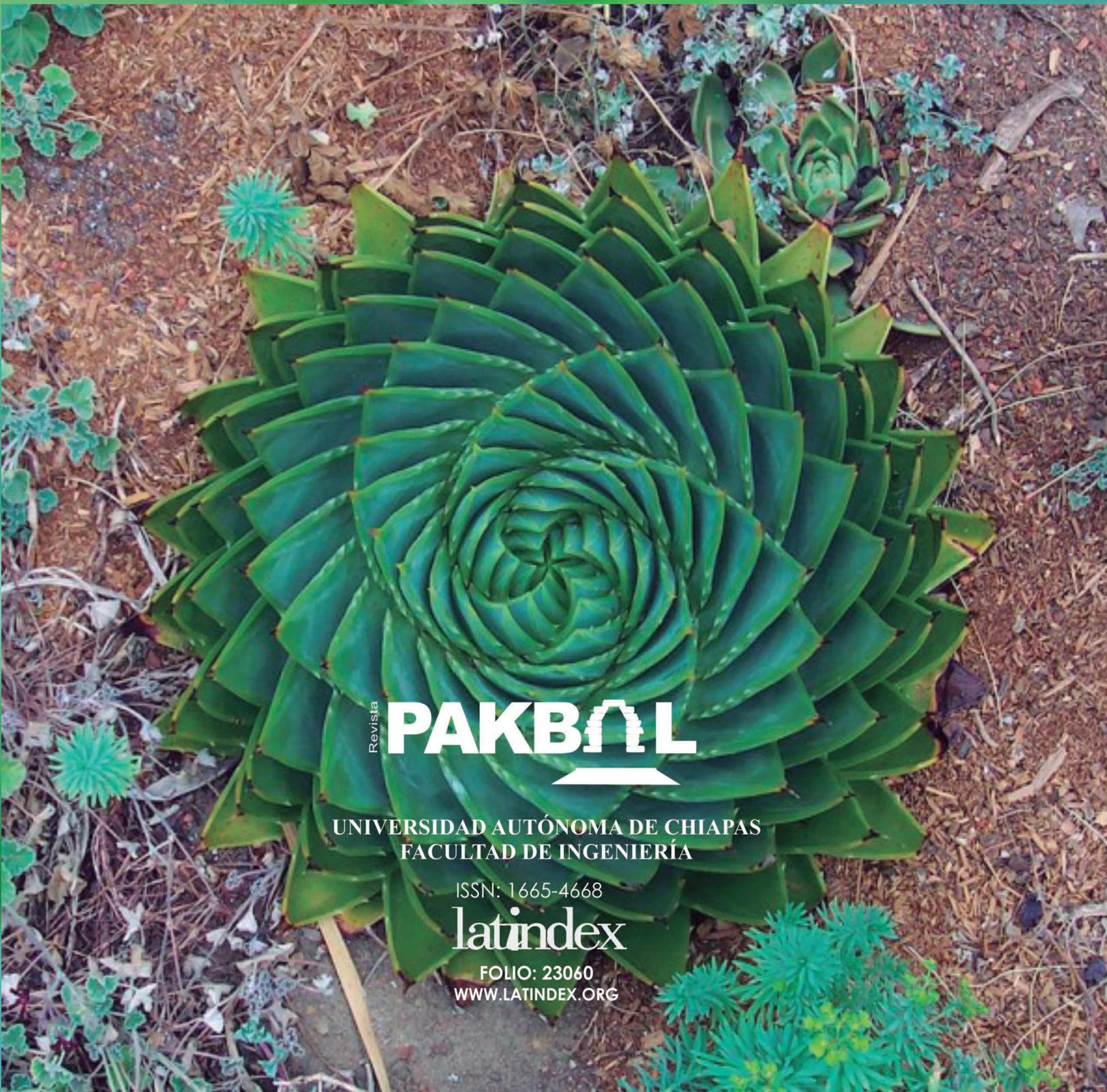
## UNIDAD DE CONSULTORÍA E INGENIERÍA APLICADA (UCIA)

La Unidad de Consultoría e Ingeniería Aplicada (UCIA) ofrece consultoría especializada a instituciones públicas o privadas y/o a particulares en el área de la ingeniería civil para impulsar la Consultoría tecnológica, desarrollar estudios de ingeniería aplicada, así como realizar investigación científica y tecnológica en la Entidad, que contribuya a elevar la calidad académica, la vinculación, la extensión y la investigación con la finalidad de apoyar a las necesidades que se requieren para el desarrollo regional, estatal y nacional.

## SERVICIOS TOPOGRÁFICOS



- Líneas de control GPS (método estático).
- Levantamientos con equipo GPS en el sistema RTK.
- levantamientos para proyectos de carreteras agua potable, topohidráulicos, agrimensura, etc.
- Deslindes y configuración de terrenos.



Revista

# PAKBOL



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS  
FACULTAD DE INGENIERÍA

ISSN: 1665-4668

latindex

FOLIO: 23060  
WWW.LATINDEX.ORG

