

OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA ESTRUCTURAL MEDIANTE LA DINÁMICA LAGRANGIANA

Omar de la Cruz C.¹

RESUMEN

La Mecánica Analítica basa su estudio de equilibrio y movimiento en dos escalares fundamentales: energía cinética y función trabajo (energía potencial). La suma de la energía cinética y la energía potencial permanece constante durante el movimiento. El principio de mínima acción afirma que el movimiento real en la naturaleza es aquel movimiento particular para el cual la acción asume su más pequeño valor, siendo esta última, el tiempo total que toma una partícula en recorrer la trayectoria entre dos puntos dados. Por otro lado, ante acciones de tipo dinámico una estructura responde modificando su configuración alrededor de una posición de equilibrio estable. Estos cambios de configuración pueden alcanzar grandes amplitudes incluso para valores pequeños de la acción excitadora, pudiendo conducir al colapso de la estructura. En el presente trabajo se da una breve descripción del Cálculo Variacional y las Ecuaciones de Euler-Lagrange, así como el Principio de Hamilton. Se presentan algunos ejemplos del Formalismo Lagrangiano en la Mecánica Clásica, para finalmente aplicarlo a la obtención de la Ecuación fundamental de la Dinámica Estructural.

Palabras Clave: Análisis estructural, Mecánica Analítica, Cálculo Variacional, energía, trabajo.

ABSTRACT

Analytical Mechanics bases its study of balance and movement on two fundamental scalars: kinetic energy and work function (potential energy). The sum of kinetic energy and the potential energy remains constant during the movement. The principle of least action states that the real movement in nature is that particular movement for which the action assumes its smallest values, which is the total time a particle takes to travel the path between two given points. On the other hand, before actions of dynamic type a structure responds by modifying its configuration around a position of stable equilibrium. These configuration changes can reach large amplitudes even for small values of the excitatory action, which can lead to the collapse of the structure. In the present work we give a brief description of the variational calculus and the Euler-Lagrange equations, as well as the Hamilton Principle. Some examples of the lagrangian formalism in Classical Mechanics are presented, to finally apply it to obtain the Fundamental Equation of Structural Dynamics.

Keywords: Structural Dynamics, Analytical Mechanics, Variational Calculus, energy, work.

INTRODUCCIÓN

En el año de 1687, Isaac Newton en Inglaterra, publicó las leyes del movimiento, sentando las bases de la dinámica a través de un tratamiento vectorial. Conociendo las fuerzas que actúan en una partícula a cada instante, se puede predecir el movimiento que ésta efectuará en el tiempo. Es así como inicia la Mecánica Vectorial. Por otra parte, Leibniz, en Alemania, dedujo ecuaciones similares pero desde un tratamiento analítico. En lugar de considerar a las fuerzas que son vectores, empleó dos cantidades escalares fundamentales: la energía cinética y la fun-

¹ Profesor de la Facultad de Ciencias Física y Matemáticas de la UNACH.
Email: courtois31415927@hotmail.com

ción trabajo. Con ello surge la Mecánica Analítica. Mientras que la forma vectorial necesita de al menos 3 ecuaciones para la trayectoria de una partícula, la forma escalar nada más necesita de una, pues se vale del supuesto que la suma de la energía cinética y potencial permanece constante durante el movimiento.

Imaginemos una partícula que se encuentra en cierta posición en cierto instante (P_1, t_1) la cual se desplaza hasta otra posición en otro instante (P_2, t_2) . Existen infinitas trayectorias entre ambos puntos, y el tiempo tomado entre ambas posiciones es lo que se llama la acción. El principio de mínima acción enuncia que existe entre todas las posibles trayectorias una que minimice esta acción, la cual será escogida por la naturaleza. Euler y Lagrange hicieron este descubrimiento en 1853. Sin embargo, si la energía del sistema depende además de la posición, también del tiempo, el procedimiento varía, dando lugar a lo que se conoce como el Principio de Hamilton. En este caso, se considera que la diferencia de la energía cinética y la energía potencial permanece constante.

Es así como surge el Cálculo Variacional; esta nueva rama de las matemáticas estudia las llamadas variaciones entre funcionales (funciones de funciones), análogamente a las diferencias o incrementos estudiados en el Cálculo Diferencial. La herramienta matemática se consolida disminuyendo en muchos casos el tratamiento vectorial entre los vectores fuerza y momento. Las aplicaciones tienen mayores alcances que salen de la Mecánica Clásica y llegando hasta nuevas áreas de la Física Moderna.

ANTECEDENTES Cálculo variacional

Se llaman funcionales a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o de varias funciones. Al igual que en el cálculo de una variable, se pretende ahora hallar los valores máximos o mínimos, pero en este caso de los funcionales. El cálculo variacional estudia los métodos que permiten obtener los valores máximos y mínimos de las funcionales (Elsigoltz, 1983). El cálculo variacional se comenzó a desarrollar en 1696, considerándose a Euler como uno de sus fundadores.

Los problemas clásicos del cálculo variacional son los siguientes:

Problema de la braquistócrona. En este problema se exige determinar la línea que une dos puntos dados A y B, que no pertenecen a una misma recta vertical, que posea la propiedad de que un punto material se deslice por dicha línea desde el punto A hasta el B en el menor tiempo posible. Tanto el problema como la solución fueron dadas por I. Bernoulli en 1696, siendo el resultado una curva llamada la cicloide.

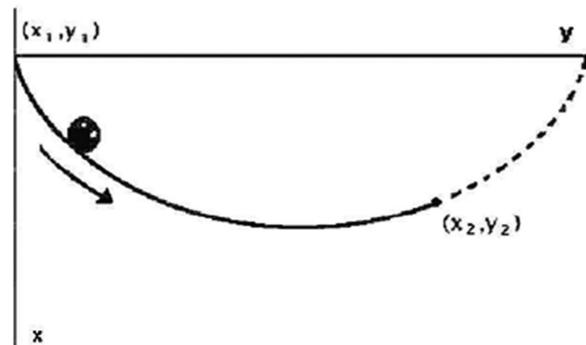


Figura 1. La cicloide

Problema isoperimétrico. Se pide hallar una línea cerrada de longitud dada l que delimite el área máxima S . Este problema cuya solución es la circunferencia fue resuelto por Euler.

Problema de las líneas geodésicas. Se pide determinar la línea de menor longitud que una dos puntos dados en cierta superficie. La solución son precisamente las curvas llamadas geodésicas, y fue dada por Bernoulli, Euler y Lagrange.

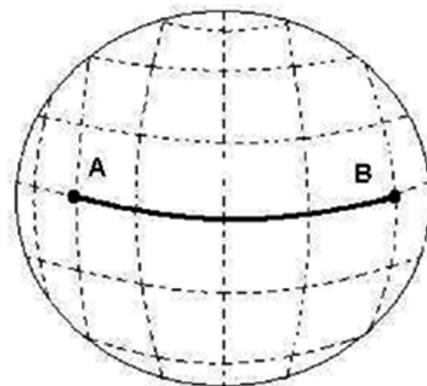


Figura 2. Geodésica de una esfera.

A continuación introduciremos la terminología del cálculo variacional. La variable v se llama funcional dependiente de la función $y(x)$ y se designa $v=v[y(x)]$. A la diferencia entre dos funciones $\delta y=y(x)-y_0(x)$ se le llama incremento o variación δy del argumento $y(x)$ de la funcional $v=v[y(x)]$. Un funcional se dice continuo para $y=y_0(x)$ en el sentido de proximidad de k -ésimo orden si para todo $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que $|v[y(x)]-v[y_0(x)]|<\varepsilon$ para

$$\begin{aligned} |y(x) - y'_0(x)| &< \delta \\ |y''(x) - y''_0(x)| &< \delta \\ \dots \\ |y^{(k)}(x) - y^{(k)}_0(x)| &< \delta \end{aligned}$$

La variación de la funcional $v[y(x)]$ es igual a

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y] |_{\alpha=0}.$$

Teorema. Si la funcional $v[y(x)]$, que posee variación, alcanza su máximo o su mínimo para $y=y_0(x)$, siendo $y_0(x)$ un punto interior de la región de la definición de la funcional, entonces para $y=y_0(x)$ se cumple que $\delta v=0$ (Amazigo, 1988).

Ecuación de Euler

Consideremos el funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

con F una función tres veces derivable. Aplicando el lema fundamental del cálculo variacional se tiene la llamada Ecuación de Euler

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Históricamente, podemos partir de la idea que la naturaleza actúa siempre de tal forma que determinadas cantidades de importancia resultan siempre minimizadas cuando tiene lugar un proceso físico. Hamilton lo enunció de la siguiente manera:

Principio de Hamilton: De todas las trayectorias posibles que puede seguir un sistema dinámico para desplazarse de un punto a otro en un intervalo de

tiempo determinado, la trayectoria verdaderamente seguida es aquella que hace mínima la integral temporal de la diferencia entre las energías cinética y potencial. Matemáticamente

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0$$

Ya que la energía cinética T depende de las velocidades y la energía potencial U de la posición, si llamamos $L=T-U$ tenemos que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange tendremos que

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Las cuales son las ecuaciones de movimiento de Lagrange para la partícula, siendo L la llamada función de Lagrange o lagrangiana de la partícula.

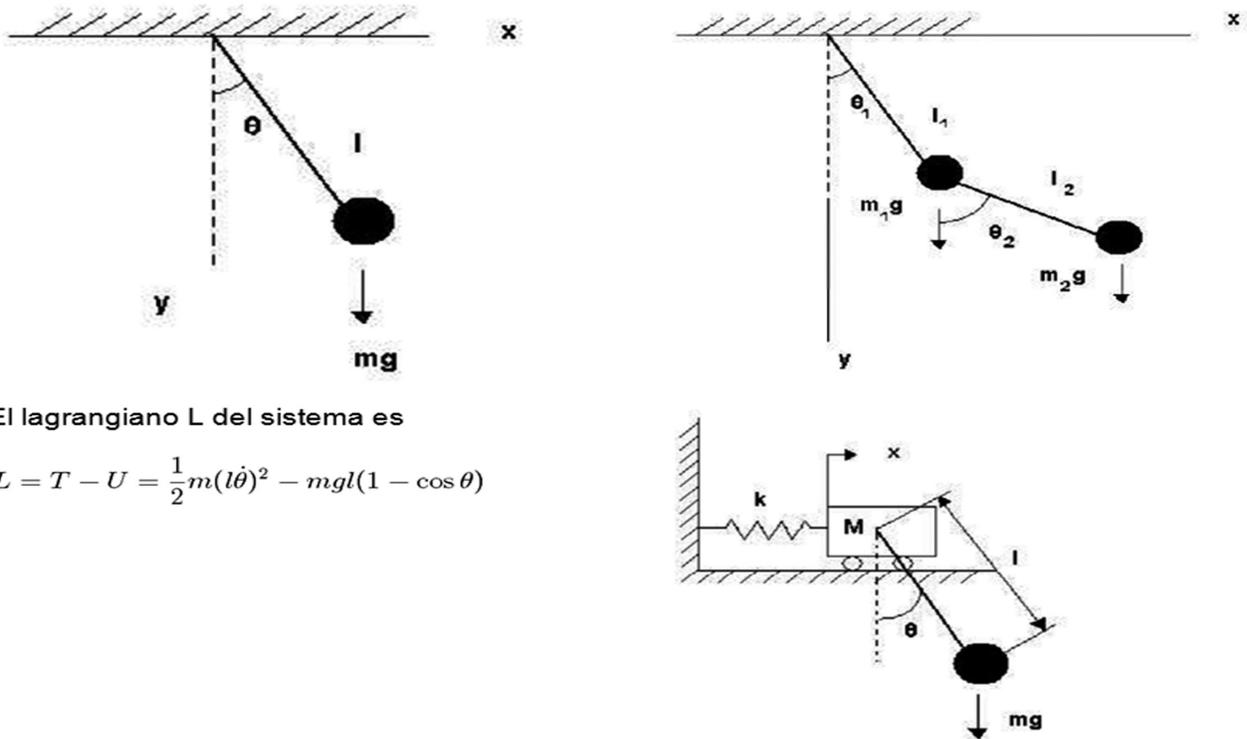
Aplicaciones a la mecánica clásica

El formalismo lagrangiano se puede aplicar a las leyes de Newton, como se puede observar en los siguientes ejemplos: el péndulo simple, el péndulo doble y el péndulo móvil.

Los respectivos lagrangianos de doble péndulo y del péndulo móvil son

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] - \\ &- m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) - m_2 g [l_1 (1 - \cos \theta_1) + l_2 (1 - \cos \theta_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l \cos \theta \dot{\theta}) - mgl(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2} kx^2 \end{aligned}$$



El lagrangiano L del sistema es

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos \theta)$$

Figura 4. Péndulo simple, péndulo doble y péndulo móvil (Landau, 1970).

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

Cuando las estructuras se someten a cargas o a desplazamientos ofrecen un comportamiento dinámico (Malaktar, 2003). Las fuerzas que actúan sobre éstas son iguales a la masa por la aceleración, de acuerdo a la segunda ley de Newton. Más aún, todas las estructuras reales, tienen potencialmente un número infinito de desplazamientos, por lo que los modelos matemáticos actuales, basados en elementos finitos, están encaminados a proporcionar un esquema computarizado con un número finito pero grande de

masas y un número finito correspondiente de desplazamientos nodales, que simule el comportamiento real de la estructura. La masa total de la estructura se distribuye en los nodos en pequeñas masas (véase Figura). En el caso de estructuras elásticas lineales, se puede conocer con un alto grado de confianza, sus características de rigidez (Pérignon, 2004). Por otro lado, las cargas dinámicas, las propiedades intrínsecas de disipación de energía y condiciones de frontera en diversas estructuras, representan magnitudes difíciles de estimar (por ejemplo, cuando consideramos las cargas asociadas al viento, o el caso de un movimiento sísmico) (Hutton, 1981).

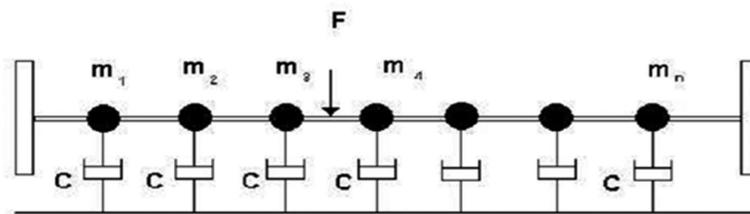


Figura 5. Discretización de una viga

Sin embargo, se han desarrollado esquemas que permiten modelar con bastante aproximación la dinámica de muchas estructuras a través del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = F(t) \quad (1)$$

donde el vector columna y representa las coordenadas generalizadas y_1, \dots, y_n usadas en la descripción del movimiento de la estructura; M es la matriz de masa, C la matriz de amortiguamiento y K la matriz de rigidez. Las dimensiones de estas tres últimas matrices es $n \times n$, donde n representa el número de grados de libertad del sistema. El vector dependiente del tiempo, representa las fuerzas generalizadas que actúan sobre la estructura $f_1(t), \dots, f_n(t)$. Los elementos de las matrices M , C , K son constantes, formadas por entradas reales. Con lo que respecta a y y a F , éstas son funciones vectoriales $t \rightarrow y(t) \in \mathbb{R}^n, t \rightarrow F(t) \in \mathbb{R}^n$, que en el caso específico de $y(t)$, representa la solución de la ecuación matricial (1), por lo que es una función de clase C^2 .

El resto de la sección nos avocaremos a obtener la ecuación (1), haciendo uso para ello de la dinámica lagrangiana.

Supondremos que las ecuaciones que ligan las coordenadas generalizadas y las coordenadas rectangulares no contienen explícitamente al tiempo, o sea,

$$x_{\alpha,i}(y_i), \quad y_j = y_j(x_{\alpha,i})$$

Entonces, la energía cinética será una función de segundo grado y homogénea de las velocidades generalizadas

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j \quad (2)$$

con m_{ij} funciones de las coordenadas generalizadas y_i . Sin embargo, un desarrollo local T alrededor del punto de equilibrio que desdén los términos superiores al cuadrático impondrá necesariamente que m_{ij} se puede considerar un término constante y simétrico (Goldstein, 1963)

$$m_{ij} = m_{ji}$$

Otro hecho importante de observar es que la energía cinética $T > 0$ a menos que las velocidades

generalizadas sean todas nulas lo que implicaría en este caso que $T = 0$. Esta propiedad se expresa diciendo que la forma cuadrática (de las velocidades generalizadas) T es definida positiva, o equivalentemente que la matriz $M = [m_{ij}]$ asociada a la forma cuadrática T es definida positiva.

Las estructuras al vibrar, pueden disipar y/o almacenar energía por diversos medios. La energía debida al movimiento es descrita por la energía cinética. Por otro lado las estructuras pueden almacenar energía por medio de las fuerzas elásticas, las cuales en muchos casos, podemos expresarlas a través de un potencial escalar $V = V(y_1, \dots, y_n)$, función únicamente de las coordenadas generalizadas.

Desde el punto de la Física, la disipación de energía pueden ser de dos tipos: fricción coulombiana y amortiguamiento viscoso, siendo éste último el caso de la dinámica estructural. La disipación por fuerzas de amortiguamiento viscoso se expresa por la función de disipación de Rayleigh, la cual es una forma cuadrática de las velocidades generalizadas de la forma

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j \quad (3)$$

donde c_{ij} son los coeficientes de amortiguamiento, que en la mayoría de los casos, resultan ser términos constantes y simétricos ($c_{ij} = c_{ji}$). Las fuerzas generalizadas $F(t)$, las cuales no caen en ninguna de las categorías elásticas o de amortiguamiento, son obtenidas por la expresión del trabajo virtual

$$\delta W = \sum_{i=1}^n f_i \delta y_i \quad (4)$$

Recordemos que las fuerzas generalizadas pueden ser funciones del tiempo y no necesariamente funciones de los desplazamientos y/o las velocidades generalizadas.

La lagrangiana del sistema resulta ser

$$L = T - V \\ L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j - V(y_1, \dots, y_n) \quad (5)$$

De esta última fórmula notemos que L es función de $2n$ variables formadas por las posiciones y velocidades generalizadas

$$L = L(y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n).$$

Además, las ecuaciones de movimiento se obtienen de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}_i} = f_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

De la ecuación (6), se obtienen n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, no-homogéneas y no-lineales. Queremos establecer la ecuación matricial (1). Para ello haremos lo que frecuentemente se hace en estos casos, y consiste en *linealizar* alrededor de un punto o posición de equilibrio estable. En los puntos de equilibrio se anulan todas las fuerzas generalizadas que actúan en él, y en este caso las velocidades generalizadas valen cero, por lo que el sistema seguirá en equilibrio indefinidamente.

Una posición de equilibrio se dice estable, cuando una pequeña perturbación del sistema respecto al equilibrio sólo de lugar a un pequeño movimiento limitado en torno a la posición del reposo. Matemáticamente, esto equivale a decir que en los puntos de equilibrio, el potencial V es mínimo. Para ello, supongamos que se perturba el sistema (en este caso, la estructura), respecto al equilibrio, por medio de un aumento dE de energía por encima de la energía de equilibrio. Si V es un mínimo en el equilibrio, cualquier desviación respecto a esta posición dará lugar a un aumento de la energía potencial V. En virtud de la conservación de la energía, las velocidades deberán disminuir, por lo que el sistema se moverá alrededor del punto de equilibrio y así el movimiento será limitado.

Por esta razón, los puntos de equilibrio estable se caracterizan por satisfacer las ecuaciones (Goldstein, 1963):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y_i} &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \dot{y}_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

Puesto que aquí estamos considerando puntos de equilibrio estable del sistema, luego estamos hablando equivalentemente de puntos

$$y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n}, \dot{y}_{01}, \dots, \dot{y}_{0n})$$

donde el potencial V alcanza su mínimo. Sin pérdida de generalidad, a través de una traslación, dicho punto de equilibrio estable será el punto $0 \in \mathbb{R}^{2n}$, es decir

$$y_0 = 0$$

Trayendo un teorema del cálculo de varias variables (Bartle, 1980), tenemos el siguiente hecho:

Si el potencial V tiene un mínimo relativo en el punto y_0 , entonces necesariamente la siguiente matriz es semidefinida positiva en el punto y_0 (Ecuación (8)):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_1} \Big|_{y_0} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2} \Big|_{y_0} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_n} \Big|_{y_0} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_2 \partial y_1} \Big|_{y_0} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_2 \partial y_2} \Big|_{y_0} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial y_2 \partial y_n} \Big|_{y_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_n \partial y_1} \Big|_{y_0} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_n \partial y_2} \Big|_{y_0} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial y_n \partial y_n} \Big|_{y_0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Esto será un hecho fundamental, pues en el caso que estamos desarrollando, dicha matriz será ni más ni menos que la matriz de rigidez K de la estructura, por lo que sabemos desde ahora que K es semidefinida positiva, es decir, cumple que $Y^t KY \geq 0$ para todo vector $Y \neq 0$, con Y^t la matriz transpuesta.

En el modelo planteado estamos considerando que la estructura se comporta "localmente", es decir, toda su dinámica se desarrolla alrededor del o los puntos de equilibrio estable. Matemáticamente esto equivale a que podemos realizar un desarrollo local de Taylor del lagrangiano (5) (en una vecindad) alrededor del punto de equilibrio, removiendo aquellos términos de mayor orden que el cuadrático (Ecuación (9))

$$\begin{aligned} L &\cong L(y_0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial y_i} \right) \Big|_{y_0} y_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \Big|_{y_0} \dot{y}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_j} \right) \Big|_{y_0} y_i y_j \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right) \Big|_{y_0} \dot{y}_i \dot{y}_j \end{aligned} \quad (9)$$

donde $y^0 = (y_{01}, \dots, y_{0n}, \dot{y}_{01}, \dots, \dot{y}_{0n}) = 0$ es el punto de equilibrio alrededor del cual se está haciendo el desarrollo local de Taylor.

Notemos que de (7), las velocidades generalizadas, $(\dot{y}_{01}, \dots, \dot{y}_{0n})$ son todas cero, por el supuesto hecho de arriba, con lo cual $y_0 = 0$.

Ahora bien, como la energía cinética T está dada por la relación (2), luego no contiene términos lineales ni constantes en las velocidades generalizadas, así

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \Big|_{y_0} = m_{ij}$$

También de la ecuación (7),

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right|_{y_0} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_j \Big|_{y_0} = 0$$

Como T no depende de las posiciones generalizadas, entonces sus derivadas parciales con respecto a ellas son cero.

Por otro lado tomando en cuenta que la energía potencial tiene un extremo en los puntos de equilibrio, se tiene que

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y_i} \right|_{y_0} = 0.$$

Puesto que V no depende de las velocidades generalizadas, las derivadas parciales de V respecto a ellas son cero. De todo lo anterior se sigue el sistema (10)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial L}{\partial y_i} \right|_{y_0} &= \left. \frac{\partial(T-V)}{\partial y_i} \right|_{y_0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y_i} \right|_{y_0} - \left. \frac{\partial V}{\partial y_i} \right|_{y_0} = 0, \\ \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right|_{y_0} &= \left. \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{y}_i} \right|_{y_0} = \left. \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right|_{y_0} - \left. \frac{\partial V}{\partial \dot{y}_i} \right|_{y_0} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{y_0} &= \left. \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial L}{\partial y_j} \right|_{y_0} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} &= \left. \frac{\partial^2(T-V)}{\partial y_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} = - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} \\ \left. \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} &= \left. \frac{\partial^2(T-V)}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y_0} = m_{ij} \end{aligned} \quad (10)$$

Otro tanto pasa si definimos las constantes

$$k_{ij} = k_{ji} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_j} \right|_{y=y_0} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial y_j \partial y_i} \right|_{y=y_0}$$

$\forall i=1, \dots, n$; estas constantes definen las entradas de la matriz simétrica $n \times n$ $K=[k_{ij}]$ llamada la matriz de rigidez. De hecho, por el teorema mencionado anteriormente, esta matriz es semidefinida positiva.

En definitiva, los valores encontrados en (10) nos dicen que el desarrollo local del lagrangiano en (9) alrededor del punto de equilibrio estable es:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} y_i y_j. \quad (11)$$

donde $L(y_0)$ es una constante que podemos despreciar.

Antes de continuar con la deducción de la ecuación (1), cabe resaltar la existencia de otra matriz simétrica $n \times n$ formada por los coeficientes c_{ij} de la función de Rayleigh (3), $C=[c_{ij}]$, llamada la matriz de amortiguamiento. De hecho, note que los coeficientes de la función de Rayleigh admiten la relación $c_{ij}=c_{ji}$, de donde

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right|_{y=y_0} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{y}_j \partial \dot{y}_i} \right|_{y=y_0}$$

Recapitulando, la energía cinética dada por la fórmula cuadrática (2), define la matriz simétrica definida positiva de masa, y la función de disipación de Rayleigh (3) define la matriz simétrica de amortiguamiento. En cuanto a la matriz de rigidez K , ésta proviene de la energía potencial V .

Finalmente, tomando en cuenta la expresión de la lagrangiana en una segunda aproximación, dada por la ecuación (11), la ecuación de Euler-Lagrange (6) deviene en el conjunto de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo grado:

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} \ddot{y}_j + c_{ij} \dot{y}_j + k_{ij} y_j) = f_i \quad (12)$$

que en notación matricial equivale a la ecuación matricial (1)

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = F(t)$$

Una vez más hacemos énfasis en el hecho de que las matrices son reales y simétricas. Además la matriz K es semidefinida positiva.

CONCLUSIONES

REFERENCIAS

El principio de Hamilton no nos proporciona teoría física nueva alguna, pero nos permite unificar satisfactoriamente muchas teorías separadas, partiendo de un postulado fundamental sencillo. El objetivo de la física no es únicamente dar una formulación matemática precisa para los fenómenos observados, sino también describir sus efectos con ahorro de postulados fundamentales y de la manera más unificada posible. Dentro de ello, el Principio de Hamilton, el cual nos proporciona las ecuaciones de Lagrange, constituye uno de los más elegantes y de mayor alcance de la física.

Para poder evitar algunas complicaciones que se presentan en los tratamientos newtonianos, existen otros procedimientos, como el explicado anteriormente y aplicado a las ecuaciones del análisis estructural. Las ecuaciones de Lagrange describen correctamente a las ecuaciones planteadas por Newton, dando otro tipo de herramienta matemática. Con el paso del tiempo, antes nuevos modelos físicos, surgían nuevos inconvenientes, y por lo tanto, una nueva herramienta matemática para su descripción. El principio variacional, surge como una extensión al cálculo, describiendo fenómenos ya conocidos y explicando algunos nuevos. El formalismo lagrangiano complementa al ya dado por Newton; la mecánica analítica aborda fenómenos como la electrodinámica, teoría cuántica de campos, mecánica de fluidos y la misma mecánica clásica, simplificando las ecuaciones diferenciales que se plantean. El hecho de que la energía se mantenga constante en un sistema, es la base fundamental de la mecánica analítica, pero para sistemas no conservativos, esto se vuelve ahora una limitante.

Herramientas matemáticas conocidas como el cálculo de varias variables y el álgebra lineal, permiten con la ayuda de la mecánica analítica poder modelar sistemas en vibración con pequeñas oscilaciones, como son las estructuras que se presentan en la dinámica estructural. El formalismo lagrangiano proyecta aquí, su practicidad y pone en marcha el poder modelar en otra forma algo que ya se sabía desde antes.

- Amazigo, J. C. and Rubinfeld, L. A. (1988). *Cálculo avanzado*. Mc Graw-Hill.
- Bartle, R. G. (1980). *Elements of real analysis*. John Wiley and Son.
- Elsgolts, L. (1983). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Editorial Mir Moscú.
- Fowles, G. R. (1962). *Analytical Mechanics*. Holt, New York.
- Goldstein, H. (1963). *Classical Mechanics*. Ed. Aguilar, Madrid, España.
- Hutton, D. V. (1981). *Applied Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill Inc., United States of America.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1970). *Mecánica*. Ed. Reverté.
- Malaktar, P. (2003). *Nonlinear Vibrations of Cantiliver Beams and Plates*. PhD thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, USA.
- Perignon, F. (2004). *Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non linéaires*. Phd thesis, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II.