LOS PARADIGMAS EN EL CÁLCULO INTEGRAL: UN ACERCAMIENTO A SUS IMPLICACIONES CONCEPTUALES Y DIDÁCTICAS

Pedro T. Ortiz y O.[1], *Patricia Gpe. Sánchez I.*[1], *Pedro A. Guadalupe O.*[2]

RESUMEN

En este ensayo se analiza la formación de las ciencias, el caso particular de las matemáticas, bajo el contexto histórico y epistemológico con el fin de determinar los paradigmas que se encuentran implícitos en el desarrollo conceptual del Cálculo Integral, para que al caracterizarlos dentro del contexto apropiado, se pueda analizar la forma en que repercuten para la formación de las primeras ideas del cálculo y su proceso didáctico, lo anterior probablemente permita conocer si existe obstáculos epistemológicos y porqué impiden alcanzar un aprendizaje efectivo.

Palabras clave: Historia, Epistemología, Cálculo Integral, Cognición.

ABSTRACT

This essay analyzes the formation of sciences, the particular case of mathematics, under the historical and epistemological context in order to determine the paradigms that are implicit in the conceptual development of Integral Calculus, so that by characterizing them within the context Appropriate, it is possible to analyze the way in which they affect the formation of the first ideas of the calculation and its didactic process, this probably allows to know if there are epistemological obstacles and why they prevent achieving an effective learning.

Keywords: History, Epistemology, Integral Calculus, Cognition.

INTROCUCCIÓN

Al tener un conjunto de conocimientos sobre los conceptos e ideas que han surgido de una ciencia o una técnica, se puede identificar si hay elementos que no son parte de la formalización pero que inciden en el entendimiento general, teniendo como elemento el entorno y el lugar histórico, lo cual genera diversas temáticas y perspectivas de análisis, que pueden contener una implicación didáctica.

Existen diversos procesos de elaboración y transformación de las teorías y el conocimiento (D'Amore, 2002), en las que se puedan analizar la génesis histórica y epistemológica a fin de establecer una conexión entre diversos elementos, principios e hipótesis conceptuales, al conocer la forma y el entorno en que se desarrollan. De este análisis se puede encontrar el conjunto de conceptos que sean comunes dentro de una representación lógica y ordenada, de manera que sea posible obtener repercusiones educativas.

Para desarrollar esta construcción objetiva se puede usar a las matemáticas, por ser la ciencia en la que a través de un proceso cuantitativo de la realidad se conduce al establecimiento de un lenguaje común, involucrando ideas desarrolladas dentro de una estructura que representan relaciones de tipo lógico y verdadero.

Para desarrollar el lenguaje científico, las matemáticas necesitan de una visión y una perspectiva que permitan manejar el panorama en forma general. A manera de comparación sería el observar un valle desde la perspectiva de una montaña, debe existir la capacidad de desarrollar el camino que conduzca a puntos específicos del valle, que en muchos casos serán de naturaleza muy particular.

Al tener que desarrollar diversos caminos se focaliza la atención en ciertas regiones o áreas, lo que im-

[1] Profesores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas. Email: ptoyomx@yahoo.com; sancheziturbe@yahoo.com.mx;
[2] Profesor, ITM. Email:portiz130@gmail.

plica la especialización para descubrir los recovecos de los conocimientos y por lo tanto la necesidad de explicarlos con el uso del lenguaje cada vez más especializado y abstracto. Así los conceptos serán idealizados de manera que se tengan que definir algunos elementos matemáticos, como por ejemplo, el punto, la línea o el área.

Los principios básicos de las matemáticas están en consonancia con la representación abstracta de la realidad, en una dualidad de interpretar y formalizar. Para la interpretación se utilizan recursos como la formación de las relaciones conceptuales en términos de elementos básicos, símbolos y su composición.

Al formalizar los elementos básicos de las matemáticas esta se desarrolla con relaciones en forma de axiomas, postulados, teoremas, usados para construir el andamiaje de las matemáticas.

Las conclusiones del saber matemático se representan como componentes que integran el gran edificio de las matemáticas que se construye de diferentes entidades, y que desarrollan, el número, la cantidad, la forma, la dimensión, cambio, movimiento, incertidumbre y la aleatoriedad.

Para realizar el análisis de estos temas es necesario según D'Amore (2008), definir una perspectiva del entendimiento histórico que permita acercarse críticamente a los principios, las hipótesis, las conclusiones en términos de definir el valor y su objetividad, con el fin de conocer las teorías y leyes para entender el crecimiento del conocimiento científico y su interrelación con el mundo social y económico.

En el análisis de estas interrelaciones, se puede aplicar la epistemología, que se considera como una disciplina avocada al estudio del saber científico, sin considerarse una filosofía de la ciencia, ni una gnoseología que considere a la teoría del conocimiento. La epistemología estudia los principios, las hipótesis y las conclusiones a las que llegan diversas ciencias con el propósito de establecer la objetividad y la veracidad el conocimiento en forma crítica.

DESARROLLO DEL ANÁLISIS

Las ideas fundamentales del cálculo diferencial e integral consisten en variación y acumulación (Imaz y Moreno, 2010); en el caso del cálculo integral, la génesis del concepto de acumulación se encuentra inicialmente en la explicación del cosmos por Démocrito (460-370 a. C), en Ruiz (2003), para éste filosofo el universo se encuentra formado por elementos fundamentales de carácter inseparable que llamó átomos, palabra que significa justamente inseparable y son eternos, indestructibles e indivisibles. La inmutabilidad de los átomos radica en su solidez, lo que permite que no exista el vacío dentro del átomo, la combinación de átomos y el vacío define la naturaleza de la materia.

Así, los problemas matemáticos, que interesan a Demócrito son de carácter diminuto, por su visón atómica, él mismo representaba a un sólido como la suma de un número infinito de capas planas paralelas unas a otras, muy delgadas y próximas. Esta idea le permitió calcular que el volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma que tiene la misma base y la misma altura

De igual, manera, con referencia a Ruiz (2003), Eudoxo de Cnido (390-337 a. C) aplicó el método exhaustivo para hallar el volumen de una pirámide, que consiste en expandir sucesivamente áreas conocidas, como puede ser, el inscribir polígonos regulares en una circunferencia de radio unitario, hasta que se agoten los polígonos y que quede "xhausta", es decir que se confundan con el círculo.

Las ideas matemáticas anteriores, Pickover (2009), fueron desarrolladas de manera sobresaliente por Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.), las cuales quedaron plasmadas en su obra llamada el Método. En esta obra, aparece la exhaustividad, que se basa en la aplicación de la Geometría y la Mecánica, y que básicamente consiste en considerar el peso del sólido formado por elementos infinitesimales y lograr el equilibrio.

De esta forma llegó a encontrar diversos resultados, entre los que sobresale la determinación de volúmenes de segmentos esféricos, segmentos parabólicos y sólidos de revolución. Como aspectos importantes que aparecen en las obras de Arquímedes, están la necesidad de evitar el uso del infinito, y que al aplicar la exhaustividad, es necesario conocer el resultado antes, lo que de manera indirecta conduce a la comprobación, estableciendo así la heurística y el razonamiento del descubrimiento y la demostración.

De manera que la tensión conceptual en la ciencia griega se produjo cuando se discute lo discreto y lo continuo, pues se consideraba que los números y las líneas pertenecían a estratos conceptuales distintos al estudio de la aritmética y la geometría, donde el número, está asociado a la abstracción, al mundo material, y solo puede aplicarse al estudio de colecciones discretas, por lo que no hay asociación de continuidad relacionada al número.

Por el contrario, cuando se utilizan las proporciones o razones para expresar conceptos relacionados, la unidad ocupa un lugar privilegiado, de esta manera se evita la existencia de elementos infinitesimales lo que permitan resolver paradojas, como la de Zenón, en donde los números son considerados como proporciones numéricas exactas, sin una correlación en todos los casos con longitudes.

DISCUSIÓN

Se puede considerar que el desarrollo histórico-conceptual del Cálculo integral, pasa por tres períodos o momentos fundamentales: la etapa griega (G), la etapa del renacimiento-ilustración (RI) y la etapa decimonónica (D).

Para caracterizar estos períodos del desarrollo matemático del cálculo, en los que se producen problemas y soluciones dentro de un grupo o comunidad intelectual de científicos, es necesario el uso del concepto de paradigma.

Éste fue propuesto por Kuhn en: La estructura de las revoluciones científicas, donde es representado en forma polisémica, esto es, con diferentes significados. Posteriormente, el paradigma quedó definido por las creencias, las generalizaciones, los valores, las técnicas, los tipos de problemas por investigar, las soluciones típicas, entre otros aspectos en torno a los cuales un grupo de científicos de determinada disciplina participan y desarrollan la producción de sus conocimientos.

Al igual que en la filosofía de las ciencias se han propuesto diversas tipologías epistemológicas, acerca de la construcción, la evolución y el desarrollo del conocimiento. Entre ellos sobresalen el falsacionismo de Popper y los programas de investigación de Lakatos, caracterizados por una tradición racionalista, en la que se considera que la ciencia avanza dependiendo de factores o criterios endógenos de la disciplina científica, en contraste con el concepto de paradigma que toma en cuenta los factores sociológicos y psicológicos de los avances o cambios científicos.

En consecuencia, según Hernández (1998), los paradigmas tienen cinco componentes que los definen: 1.-Problemas de investigación 2.- Fundamentos epistemológicos 3.- Supuestos teóricos 4.- Propuestas metodológicas y 5.- Proyecciones de aplicación.

Como ya se mencionó, se consideran tres los paradigmas del proceso de desarrollo histórico del Cálculo integral, estos están constituidos por el paradigma griego, el del renacimiento-ilustración, y el decimonónico. Así se pueden examinar los componentes de los paradigmas el conocimiento del cálculo de la siguiente manera:

1º El caso griego, que considera que el problema de investigación es hallar áreas o volúmenes de sólidos geométricos, lo que se fundamenta en el materialismo desarrollado por Demócrito, bajo un supuesto de existencia de la inmutabilidad atómica, y que permite desarrollar alternativas de solución usando la exhaustividad.

2º El paradigma del renacimiento-ilustración, tiene como problema de investigación la relación acumulación-variación, que se manifiesta en el desarrollo de los infinitésimos conceptualizados por S. Stevin (1548 - 1620), con la teoría de la fusión del número con el continuo, lo que permite establecer propuestas metodológicas del límite, y analizar diversas situaciones científicas y técnicas como las relacionadas con los fluidos y los gases.

3º El caso del paradigma decimonónico de la integral, en el que aparece la necesidad de formalizar el concepto de límite mediante el paso de la argumentación geométrica a la aritmética y que tiene como fundamentos el análisis aritmético, bajo un supuesto teórico de establecer un número racional independiente del límite y el análisis de sucesiones, que conducen a la definición del límite ε- δ, lo que llevará a una formalización del cálculo en la solución de problemas científicos.

López (1990) señala que categorizar los paradigmas, permite establecer una comparación con el proceso cognitivo de aprendizaje de los estudiantes, sobre todo con las personas que aprenden por primera vez el Cálculo integral.

El paradigma desarrollado en Grecia, se aplica conceptualmente en los estudiantes actuales, identificando a la integral como la suma de un conjunto de capas paralelas que forman el volumen de un sólido, de tal manera que integran la forma volumétrica del cuerpo como una estructura total, semejante a la conceptualización vigente desde Arquímedes hasta Wallis (Prabhu y Czarnocha, citado por Crisóstomo, 2012).

Puede visualizarse la existencia de un obstáculo al considerar a la integral definida en la forma del límite de una suma, pues la imagen formada conceptualmente corresponde a la idea del área bajo la curva, desarrollada bajo la consideración de la exhaustividad denotada por Arquímedes.

Cordero (2005), observa que en los procesos de didáctica para desarrollar el cálculo integral, se debe poner de manifiesto, el énfasis en el estudio de la integral desde el punto de vista de la acumulación como noción fundamental y evitar la formalización, que conduce al desarrollo de la suma de Riemann. El mismo autor considera en forma general, que se debe poner un acento muy fuerte en la variación continua, así como en la noción de acumulación y no en los conceptos de derivación o la suma antes mencionada.

En un análisis, Czarnocha, Dubinsky, Loch, Prabhu y Vidakovic (citado por Crisóstomo, 2012), plantean la existencia de un pensamiento atómico de la estructura que forma al espacio, misma que se pone de manifiesto al estudiar la comprensión de la integral en los estudiantes, pues en el proceso de construcción de sus respuestas, siempre consideran la idea de los indivisibles, al estilo que utilizaba Cavalieri, como un elemento fundamental del proceso intuitivo de la construcción de las ideas para analizar el área bajo la curva, que se genera de un objeto de forma irregular.

El uso de las sumas de Riemann quedó fuera de las expectativas de solución de las integrales definidas, pues al parecer nunca se representó como un elemento de la solución espontanea, en el proceso de definir una respuesta.

Es importante señalar que durante la formación histórica del cálculo, se tuvo que apelar al sentido común de lo que pudiera llamarse "situaciones problema", en las que se presenta el reto de hallar el volumen de un sólido o el área de una superficie, y que caracterizaron el periodo inicial de la formación del concepto de integral. El cual tuvo su desarrollo durante el periodo Helénico.

Lo anterior permite considerar que el proceso de construcción del conocimiento no es lineal, sino que se enfrenta a varios obstáculos en su formación, que pudieran llamarse obstáculos epistemológicos.

Está formación conceptual que se produce en forma espontánea, es manifestada en forma significativa bajo la idea de lo que Reis (2001), llama "una tensión entre el rigor y la intuición", que observó en los profesores de matemáticas durante una investigación centrada en el uso de manuales didácticos y entrevistas estructuradas.

Situación que conduce a analizar propuestas didácticas que permitan hacer fluir la formación de ideas iniciales, de forma intuitiva según su desarrollo histórico, similar a la propuesta de Wenzelburger (citado por Crisóstomo, 2012), que propone seguir la génesis histórica del cálculo para desarrollar un acercamiento que se base en la intuición de los cambios, usando aplicaciones, en las que se desarrollen los elementos básicos de la construcción geométrica de la integral, como el área y el volumen.

Bajo la perspectiva de Turégano (citado por Crisóstomo, 2012), el bajo rendimiento de los estudiantes universitarios y de bachillerato, en el cálculo tiene tres vertientes fundamentales, definidos por los planos psicológicos, didáctico y epistemológico.

En otro análisis Turégano (1998), llega a la conclusión que la revisión de la formación histórica debe ser fundamental para la comprensión del cálculo de manera que debe existir preferentemente un desarrollo en la secuenciación de los contenidos y la formación de los conceptos, en menoscabo del orden lógico, cuando se desarrolla el establecimiento de la seriación de los contenidos, a fin de que se logre una formación de los conceptos por la solución de problemas en los que se involucren el desarrollo histórico del cálculo.

El autor anterior propone la secuenciación curricular para iniciar el curso del cálculo, por el estudio de la integral definida, en términos de la formación auténtica del cálculo, con una total independencia de los conceptos de límite y de la diferencial, usando el contexto de la solución de problemas en los que se presenten la exhaustividad Arquimédica y los indivisibles de Cavalieri.

Para llegar a estas conclusiones consideró dos etapas en la formación en los estudiantes, en la primera, se dirigió hacia el desarrollo de un modelo matemático en términos de la integral definida y la siguiente fue el estudio de las imágenes conceptuales de la integral definida después de una etapa de aprendizaje del modelo desarrollado.

Sin embargo, una aproximación a la didáctica del paradigma basado en el cálculo decimonónico, en donde el rigor de la formalización es elemento fundamental, se puede encontrar en el uso de las tecnologías de la información y la comunicación, como lo considera seminalmente, la investigación de Scuculia (2006), en la que manifiesta que la formación conceptual de la suma de Riemamm y de la integral, que se relacionan con el Teorema fundamental el cálculo, se logra desarrollar en forma de demostración, por medio de la intuición y las notaciones que simplifiquen la idea. Esto es el paso al rigor axiomático, que se produce después de discusiones de los procesos relacionados con la deducción, y la aplicación formal de la simbología y que se realiza posteriormente al uso de la calculadora que gráfica en forma experimental para el desarrollo del pensamiento en estudiantes de cálculo en el nivel universitario.

CONCLUSIONES

El categorizar el desarrollo histórico del cálculo a través de tres paradigmas fundamentales permite identificar elementos nodales en el proceso de construcción conceptual de la integral, las tres ideas: la exhaustividad, los indivisibles y el límite.

La exhaustividad se desarrolló con elementos fundamentales de la intuición cotidiana, a partir del atomismo de Demócrito, quien consideró que existe un elemento fundamental en la formación de los objetos, llamado átomo. Por lo que la construcción de los objetos se basa en la acumulación de estos en forma desordenada y si se requiere una visión macroscópica, en capas uniformes.

Esta idea fue aplicada sistemáticamente por Arquímedes y está presente en diversos escenarios para la determinación de los volúmenes y las áreas en forma intuitiva, como lo manifiestan las investigaciones sobre la integral. En la era contemporánea, también está presente en la cotidianidad del salón de clases en donde se desarrolla el aprendizaje de la integral, pues el profesor recurre a elementos conocidos como las rebanadas, los rectángulos, los discos o cualquier otro objeto que se ajusten a un área o volumen para transmitir el concepto de la integral definida.

Se puede reconocer que cuando se usan los elementos geométricos por medio de la analogía, se desarrolla un entendimiento muy significativo en la comprensión de la integral, lo que permite una transferencia casi inmediata de la idea, lo cual va en beneficio de la didáctica del concepto.

Otra consideración es que la presencia de los elementos representativos del concepto de integral entran en juego cuando se plantea un problema, en el que la capacidad de interpretación y análisis se realiza en forma inmediata por la existencia de componentes representativos, que se dan la forma visual de la idea o el concepto de se estudia.

Siguiendo el desarrollo histórico del concepto de integral la aparición de la idea de los indivisibles con Cavalieri, vino a darle un nuevo impulso al proceso de la construcción de integral, pues puso en discusión la idea de realizar el análisis del proceso de integración bajo la consideración de una analogía de elementos conocidos, con otros que se quieren conocer bajo una perspectiva analógica de la realidad, además preparó el terreno para la aparición de los infinitesimales como herramienta de construcción matemática de la integral.

El tránsito hacia la idea de que un incremento o parte de realidad "discretizada" sea visible u observable en el proceso de integración, como lo es en el proceso de la exhaustividad, a una idea llamada infinitesimal, considerado como un elemento meramente conceptual, genera cierta desconfianza en la capacidad de comprensión, como se señala en la história y también didácticamente en el salón de clase, pues ese proceso lleva implícita la idea de una transformación que no puede ser explicada en términos de una analogía real.

Sin embargo, el concepto de integral construida de esta manera, tiene algún significado para los estudiantes según se ha observado en diferentes estudios realizados, Cordero (2005), Imaz C y Moreno(2010), Reis(2001), que corresponden históricamente a las ideas desarrollada por los contemporáneos de Newton y Leibniz, que obtenían resultados en forma algorítmica, sin poder explicar sus fundamentos.

El proceso de la representación formal de la integral, se complica con la aparición de los infinitesimales, puesto que en cierto sentido se pierde contacto con la realidad y se empieza a trabajar con la imaginación y, de alguna manera se debe justificar este proceso de construcción mental con elementos racionales para poder extender su capacidad de explicación de su construcción, para esto se utiliza la lógica, con el fin para sustituir a la intuición en el proceso de formalización del rigor matemático.

Así la construcción del concepto paradigmático del límite alcanza una refinación inigualable en el uso de convencionalismos propios de la época positivista, que es la utilización del método científico en construcción del "edificio científico", usando la lógica y los métodos rigurosos de demostración, que avanzan en la justificación formal pero que pierden contacto con la interpretación de la realidad.

En esta etapa histórica, el siglo XIX, queda ya definido en forma estricta el concepto de integral que viene a generar diversos problemas de comprensión y entendimiento del significado de la integral misma en los estudiantes y que siempre ha generado problemas de tipo didáctico.

Sin embargo la aparición de las tecnologías abre una veta de exploración muy grande en el proceso de repensar las estrategias didácticas que permitan la construcción de aprendizajes más significativos en la construcción del paradigma de la formalización de la integral.

Las tecnologías incrementan la capacidad de la comprensión de la realidad, pues en sus procesos de representación audiovisual, permiten usar la creatividad de la imaginación para reinterpretar la realidad en forma poliédrica, con un control de proceso de construcción simbólica, lo que permite una disección de la lógica y la formalización en elementos significativos para la comprensión de ideas y conceptos abstractos.

De esta manera la didáctica del cálculo tendrá el reto de construir significados que se adapten al desarrollo histórico, pero con la gran ventaja de contar con el apoyo de los elementos tecnológicos que le den significado y faciliten la comprensión de las ideas y conceptos de difícil construcción mental en los estudiantes, y que ésta situación evolucione de forma radical y en beneficio del mejor entendimiento de una herramienta científica formidable como es el cálculo.

REFERENCIAS

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. Relime, 8(3), 265-286.

Recuperado el 12 de mayo del 2016 en: http://www.redalyc.org/pdf/335/33508303.pdf

Crisóstomo, E. (2012) Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Recuperado el 5 de mayo del 2016 en: http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Edson_Crisostomo_tesis.pdf

D'Amore B., (2002).La didáctica de la matemática como epistemología del aprendizaje matemático.

Recuperado el 4 de febrero de 2016 en: http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewFile/158/292

D'Amore B., (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de la enseñanza. Vol.17, n°1, 87-106.

Recuperado el 31 de marzo de 2015 en: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/655%20Epistemologia%20didactica%20y%20practicas.pdf

Hernández G.,(1998). Paradigmas en psicología de la educación. México: Editorial Paidos

Imaz C., y Moreno, L. (2010). Génesis y la enseñanza del cálculo. México: Editorial Trillas.

López F., (1990). Epistemología y didáctica de las ciencias. Un análisis de segundo orden.8(1),65-14.

Recuperado el 11 de enero del 2016 en: http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/51294/93040

Pickover C., (2009) De Arquímedes a Hawking. España: Editorial Crítica.

Reis, F.(2001). A tensao entre rigor e intuiçao no ensino de cálculo e análise: a visao de profesores-pesquisadores e autores de livros didácticos. Tesis doctoral. Universidad de Campinas, Brasil: Recuperado el 23 de abril del 2018 en: http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/243

Ruiz A., (2003) Historia y filosofía de las Matemáticas. Costa Rica: Recuperado el 26 de julio del 2017 en: http://www.cimm.ucr.ac.cr/wordpress/?page_id=427

Scucuglia, R. (2006) A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadora gráfica. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista. Recuperado el 22 de diciembre del 2015 en http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissertacoes/scucuglia_r_me_rcla.pdf

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en un contexto educativo. Enseñanza de las ciencias, 16 (2): 233-249. Recuperado el 12 de diciembre del 2015. en: https://ddd.uab.cat/pub/edlc/02124521v16n2/02124521v16n2p233.pdf