

POLÍTICAS DE OPERACIÓN ÓPTIMA DE PRESAS PARA GENERACIÓN HIDROELÉCTRICA CON MODELOS MARKOVIANOS Y VARIABLE CONTINUA

POLICIES OF OPTIMAL OPERATION OF DAMS FOR HYDROELECTRIC GENERATION WITH MARKOVIAN MODELS AND CONTINUOUS VARIABLE

Omar de la Cruz-Courtois¹, Delva Guichard²,
Maritza Arganis³

RESUMEN

Las dificultades en mantener un nivel deseado en el embalse de una presa se pueden clasificar en dos tipos, a corto y a largo plazo. El hecho de contar con energía disponible al momento se debe balancear con predecir cuánta energía se requerirá en un futuro cercano tomando en cuenta los escurrimientos futuros o incorporaciones de agua al embalse. El satisfacer demandas energéticas requiere de niveles altos en el embalse de la presa. Estos niveles a su vez implican posibilidades de desborde. Debe existir un equilibrio en, por un lado maximizar la generación energética pero sin poner en riesgo a los poblados que viven en las márgenes del sistema hidroeléctrico. En el presente trabajo se realizó la modelación de la generación de energía de presas hidroeléctricas que forman un sistema en cascada empleando técnicas de control óptimo para sistemas markovianos a horizonte infinito.

Palabras clave: Energía, presas, modelación estocástica, optimización, modelos de Markov.

ABSTRACT

The difficulties in maintaining a desired level in the impoundment of a dam can be classified into two types, short and long term. The fact of having energy available at

the moment must be balanced with predicting how much energy will be required in the near future, taking into account future runoff or incorporation of water into the impoundment. Satisfying energy demands implies high levels in the dam. These levels in turn imply overflow possibilities. There must be a balance between being able to maximize energy generation but without putting at risk the villages that live on the margins of the hydroelectric system. The present work carried out the modeling of the power generation of hydroelectric dams that form a cascade system using optimal control techniques for Markov systems at infinite horizon.

Keywords: Energy, dam, stochastic modelation, optimization, Markov models.

INTRODUCCIÓN

Conforme crece la población de una región las demandas de recursos hidráulicos aumentan, y con ello las demandas de energía eléctrica, por ello se necesita de manera constante una revisión continua y una correcta gestión del manejo de la generación de los recursos energéticos. En nuestro país, un porcentaje de esta generación se debe a los embalses hidroeléctricos, con lo cual, cabe pensar en la forma de la distribución y generación de la energía a través de ellos. En este sentido, un embalse hidroeléctrico tiene dos problemas a resolver; satisfacer las demandas de energía y al mismo tiempo, evitar posibles inundaciones aguas abajo del embalse.

El manejo actual de un embalse difiere del manejo para el cual fue proyectado en el pasado, con lo cual se deben actualizar las formas de gestionar estos recursos. Los niveles de un embalse hidroeléctrico determinarán la distribución de la energía y la posibilidad de desbordes. Estos niveles se conocen como políticas de operación en el embalse de una central hidroeléctrica. Los operadores de las presas

¹Profesor de la Facultad de Ciencias Física y Matemáticas de la UNACH.
Email: courtois31415927@hotmail.com

²Profesora de la Facultad de Ingeniería de la UNACH.
Email: dguich@unach.mx

³Profesora Investigadora del Instituto de Ingeniería de la UNAM.
Email: marganisj@ingen.unam.mx

hidroeléctricas son los encargados de mantener estos niveles de tal manera que cumplan los requisitos mencionados anteriormente, y esto actualmente se realiza a través de la Comisión Federal de Electricidad (CFE), la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA) en colaboración con dependencias de investigación como el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) (Domínguez, et al, 2001).

Los niveles de embalse también se encuentran sujetos a restricciones como demandas en horas pico de la CFE, curvas guías de la CONAGUA y problemas sociales que debe atender el gobierno federal. Para resolver estos objetivos encontrados se usan dos herramientas que son la simulación y el modelo de optimización. Ambas en forma individual tienen limitantes, pero en conjunto son complementarias. La simulación tiene la desventaja de poseer demasiada información para poder delimitar un problema; mientras que la modelación tiene la desventaja de no representar resultados reales, hasta que éstos sucedan (CFE, 1985).

Finalmente, cabe mencionar que dentro de los objetivos principales de un sistema hidroeléctrico se encuentra el maximizar la energía media anual producida, la reducción de la probabilidad de derrames por el vertedor, garantizar la entrega de una energía mínima y satisfacer las demandas de energías pico (Arganis, 2004).

ANTECEDENTES

Los modelos de optimización tuvieron su origen poco después de la Segunda Guerra Mundial, y con el paso del tiempo se han ido perfeccionando. Bellman (1957), desarrolló y dio origen a la programación dinámica. Ford y Fulkerson (1962) propusieron redes de flujo a los modelos óptimos. George Dantzing (1963) trabajó la programación lineal y el método simplex para el mejoramiento de algoritmos matemáticos de optimización. Jacobson y Mayne (1970) propusieron la programación dinámica diferencial. (Bellman, 1957), (Ford y Fulkerson, 1962), (Dantzing, 1963), (Jacobson y Mayne, 1970).

Butcher (1971) trabajó en Texas la programación dinámica estocástica para la operación de presas, donde presentó que para embalses con distintos usos se puede encontrar una política óptima en términos

del estado del embalse de un mes anterior, aplicando ésta a la operación en tiempo real sobre una base de registro mensual. Dentro de los modelos de optimización tanto lineales como no lineales. (Butcher, 1971).

Bertsekas (1976) introdujo la programación dinámica junto con el control estocástico y les dio un sentido más formal y pedagógico. Hascom, Lafond, Lasdon y Pronovost (1980) realizaron cálculos en términos de generación de energía hidroeléctrica y propusieron modelos a largo plazo. Quintana (1981) empleó la programación dinámica en embalses del estado de Sonora. Yakowitz (1982), Yeh (1985) y Wurbs (1993) trabajaron modelos de optimización para la planeación y el manejo de recursos hidráulicos, cuando se aplicaban a la generación de la energía eléctrica, control de avenidas, usos recreativos y abastecimiento de agua, entre otros. (Bertsekas, 1995), (Lasdon y Waren, 1982), (Quintana, 1981), (Yakowitz, 1982), (Yeh, 1992), (Wurbs, 1993).

Domínguez et. al (1993) comenzaron a estudiar el Sistema Hidroeléctrico del Río Grijalva, dividiéndolo en dos partes: políticas de regulación de avenidas para el uso del vertedor y políticas de los niveles de embalse como un volumen útil de generación de energía eléctrica; dichas políticas se determinaron en forma mensual maximizando la generación eléctrica y minimizando los derrames y posibles déficits. Domínguez, et. al (1998) trabajaron presas en cascada en el estado de Chiapas en el Sistema Grijalva mediante la programación dinámica estocástica, determinando niveles de meses inmediatos anteriores. (Domínguez, et al, 2001).

Eschenbach (2001) modificó el sistema de apoyo de decisiones en los sistemas de embalses de múltiples usos, apoyado con la simulación y optimización. Domínguez (2001) adapta el modelo de optimización de políticas de extracciones del sistema de presas considerando el valor relativo de la energía "de pico" respecto a la "de base", incorporando restricciones de energía mínima propuesta por la CFE. Sánchez y Andreu (2002) en España trabajaron en la expansión óptima de sistemas de recursos hídricos superficiales; presentaron dos sistemas de recursos hídricos superficiales para ser ampliados de manera óptima en su infraestructura hidráulica a partir de algoritmos genéticos. Arganis (2004), Alegría (2010), entre otros, han colaborado para modelar las políti-

cas de operación de los sistemas del Grijalva, a partir de muestras sintéticas y análisis de las curvas guía. (Eschenbach, 2001), (Domínguez, 2001), (Sánchez y Andreu, 2002), (Arganis, 2004), (Alegría, 2010). En este estudio se retoma la obtención de políticas de operación óptima considerando modelos markovianos y estados de espacio continuo.

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

Uno de los factores que distingue un estudio determinista de un fenómeno de un estudio estocástico es la incertidumbre de las mediciones. En el presente estudio, el ruido o la aleatoriedad viene determinada por la cantidad de agua que ingresa de manera natural al embalse de una presa. En este caso se consideraron los escurrimientos netos proporcionados por la CFE y la CONAGUA.

Para ello, se trabajó con los registros históricos de ingresos de agua en las cuencas de La Angostura y Malpaso, desde 1952 hasta 2017, obtenidos en forma quincenal (SRGHG, 2017). En las figuras 1 y 2 se observan los escurrimientos para cada una de las presas para este período de tiempo mencionado.

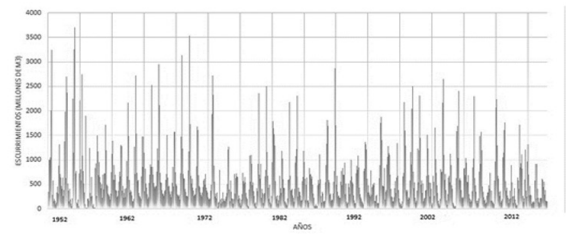


Figura 2. Escurrimientos en la presa Malpaso (SRGHG, 2017)

Probabilidades de ingreso

Para resolver el problema de la programación dinámica, se requieren conocer los estados y las etapas respectivas. Las etapas serán los respectivos meses del año. Debido a las correlaciones entre los distintos meses, las afectaciones climatológicas y las precipitaciones, la CONAGUA, ha propuesto que el estudio del sistema Grijalva se divida en 6 etapas de acuerdo a los escurrimientos estadísticos.

Tabla 1. Etapas por meses

Etapa	Meses
1	Noviembre, diciembre
2	Octubre
3	Septiembre
4	Agosto
5	Junio, julio
6	Enero-mayo

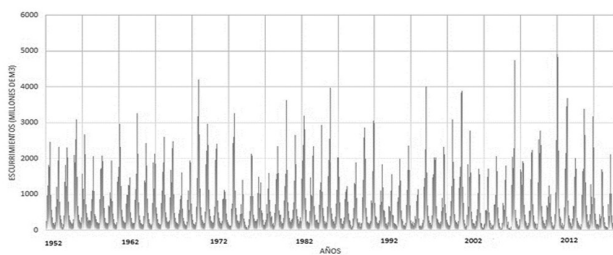


Figura 1. Escurrimientos en la presa La Angostura (SRGHG, 2017)

Para cada una de las etapas, y para cada una de las presas, se sumaron los ingresos quincenales de cada mes, obteniendo una suma total por cada año histórico. Se ordenaron los escurrimientos de menor a mayor por etapa y se calcularon las frecuencias de cada escurrimiento. Posteriormente, se calcularon las frecuencias acumuladas y se graficó el histograma por etapa.

En las figuras 3 y 4 se observan las frecuencias acumuladas para las etapas de los meses de noviembre, diciembre y octubre.



Figura 3. Histograma de la Etapa 1, de la presa La Angostura.



Figura 4. Histograma de la etapa 2 de la presa La Angostura.

Extracción mensual máxima

La CFE ha establecido coeficientes a fin de satisfacer las demandas de energía que se necesita para las horas pico. Estos coeficientes están dados en la tabla 2.

La extracción máxima mensual permitida para cada presa, de acuerdo a las características físi-

Tabla 2. Coeficientes para la energía pico

	Presa 1	Presa 2
Límite inferior	0.4	0.4
Límite superior	0.7	0.7

cas de las turbinas son 2384.64 millones de m3 para La Angostura y 3110.40 millones de m3 para Malpa-so. Con estos valores se calculan los límites superior e inferior mediante las expresiones:

$$X_{linf} = EXTMP * FELIN * NMESET \tag{1}$$

$$X_{sup} = EXTMP * FELSU * NMESET \tag{2}$$

donde EXTMP, es la extracción máxima mensual, FELIN y FELSU son los factores de límite inferior y superior para la energía pico y NMESET son la cantidad de meses por cada una de las etapas. Con estas ecuaciones se obtienen los límites de extracción máximos por etapa.

Tabla 3. Límites máximos de extracción por etapa (millones de m³)

	Presa 1	Presa 2
Etapa 1	4769.28	6220.80
Etapa 2	2384.64	3110.40
Etapa 3	2384.64	3110.40
Etapa 4	2384.64	3110.40
Etapa 5	4769.28	6220.80
Etapa 6	11923.20	15552.00

Curvas guía

La CONAGUA ha establecido curvas guía, las cuales determinan niveles que no deben ser excedidos para evitar posibles riesgos en desbordes y derrames de la presa.

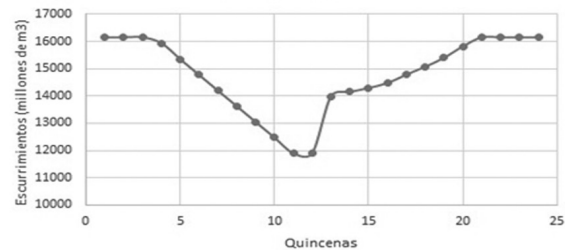


Figura 5. Curva guía de la Presa La Angostura (Alegría, 2010)

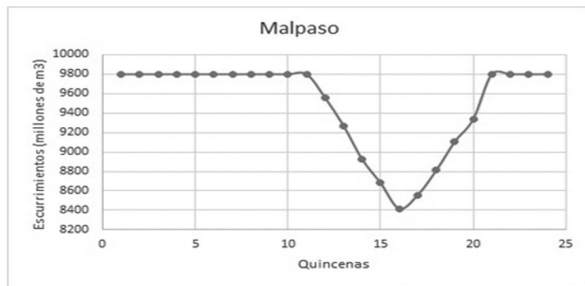


Figura 6. Curva guía de la Presa Malpaso (Alegria, 2010)

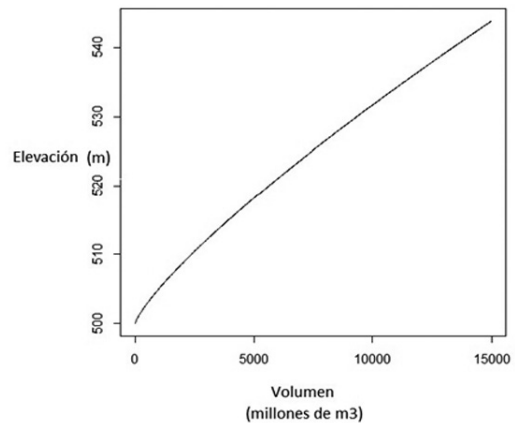


Figura 7. Curva elevación-volumen de La Angostura

Políticas de control

En el presente trabajo, el espacio de estados está representado por los distintos volúmenes que puede tomar la presa hidroeléctrica a nivel del embalse. Para ello se cuentan con los siguientes datos.

Tabla 4. Características físicas de las presas

	La Angostura	Malpaso
NAME	539.50	188.00
NAMO	533.00	182.50
NAMINO	500.00	144.00

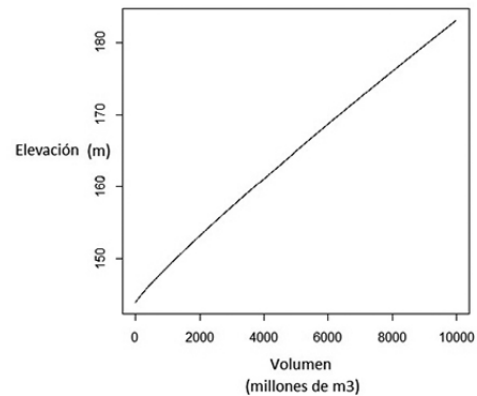


Figura 8. Curva elevación-volumen de Malpaso

Ya que La Angostura y Malpaso tienen una capacidad de almacenamiento superior en comparación con Chicoasén y Peñitas, se propone trabajar con un sistema equivalente formado por dos presas, La Angostura y Malpaso. Además, la CONAGUA y la CFE plantean las respectivas ecuaciones de elevación con relación al volumen de almacenamiento, de acuerdo con las características topográficas de cada una de las cuencas.

$$Elev_{LaAng} = 0.0214V^{0.7763} + 500 \quad (3)$$

$$Elev_{Malp} = 0.010V^{0.8982} + 144 \quad (4)$$

Espacio de estados y acciones

Los respectivos espacios de estados son los intervalos [0,6567] y [0,3400] en millones de m³ para La Angostura y Malpaso; estos estados vistos en elevaciones son los intervalos [500,539.50] y [144,188] en m, los cuales dependen del NAMINO y el NAME y se obtienen con la diferencia entre la capacidad total y la capacidad útil de cada presa.

De acuerdo con la tabla 3, los espacios de acciones representan la cantidad de volumen que se puede extraer de cada una de las presas. Estos volúmenes están en funciones de los volúmenes máximos que se pueden turbinar físicamente. Para la presa La Angostura son los intervalos cerrados [0,4769.2], [0,2384.64], [0,2384.64], [0,2384.64],

[0,4769.28] y [0,11923.20] para las etapas 1, 2, 3, 4, 5 y 6, respectivamente. Para la presa Malpaso son [0,6220.80], [0,3110.40], [0,3110.40], [0,3110.40], [0,6220.80] y [0,15552.0], para las etapas 1, 2, 3, 4, 5 y 6, respectivamente.

Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad permite conocer de qué manera evoluciona el sistema, en este caso, el nivel del embalse. Esta está dada mediante la siguiente expresión.

$$x_2 = x_1 + m - a \quad (5)$$

donde x^2 es el estado siguiente, x_1 es el estado actual, m es el ingreso y a es la extracción, todo en unidades de millones de m^3 .

Las pérdidas se representan a través de déficits o derrames. Cuando el nivel se encuentre por arriba del NAME, se considerará un derrame, y cuando el nivel se encuentre por debajo del NAMINO, se considerará un déficit. Estos criterios se expresan mediante las siguientes condiciones.

Para La Angostura:

- Si $x_2 - 6567 < 0$, se considera un derrame de 0 millones de m^3 .
- Si $x_2 - 6567 \geq 0$, se considera un derrame equivalente a $x_2 - 6567$ millones de m^3 .
- Si $x_2 < 0$, se considera un déficit de x_2 millones de m^3 .
- Si $x_2 \geq 0$, se considera un déficit equivalente a 0 millones de m^3 .

Para Malpaso:

- Si $x_2 - 3400 < 0$, se considera un derrame de 0 millones de m^3 .
- Si $x_2 - 3400 \geq 0$, se considera un derrame equivalente a $x_2 - 3400$ millones de m^3 .
- Si $x_2 < 0$, se considera un déficit de x_2 millones de m^3 .
- Si $x_2 \geq 0$, se considera un déficit equivalente a 0 millones de m^3 .

Para el cálculo de los beneficios esperados, en primer lugar se considera un factor de afectación dado por la CONAGUA de 0.002725, el cual depende de un factor de reducción o incremento en el

rango de energía, y las conversiones de unidades de la energía potencial y el tiempo de horas a segundos. Posteriormente se consideran coeficientes de derrame dados por el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Tabla 5. Coeficientes de derrame y déficit para cada presa

	La Angostura	Malpaso
Derrame	1	1
Déficit	10	1

La extracción de salida se calcula como

$$a_1 = d_2 + ET \quad (6)$$

donde a_1 es la extracción de salida, d_2 el derrame y ET la extracción turbinada. Estas salidas se comparan con las restricciones establecidas por la CFE dadas en la Tabla 3. El Beneficio se calcula con la ecuación de la energía

$$B = 2.275 \times 10^{-3} * a_1 * \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \quad (7)$$

donde B es el beneficio en kilowatt-hora, 2.2725×10^{-3} es un factor de conversión equivalente a $\frac{9.81m}{s^2} * 3600s$, a_2 es el volumen turbinado y x_1 y x_2 son los niveles inicial y final de la presa antes y después de la extracción; dichos niveles, se calculan a partir de las ecuaciones (3) y (4).

El nivel x_2 se compara con los niveles de las curvas guía dadas por la CONAGUA, y en caso de no cumplir los requisitos, se corrigen los niveles del embalse agregando los niveles iniciales de 500 y 144 m, respectivamente para La Angostura y Malpaso, y quitando los niveles entre el NAMINO y el nivel medio de desfogue, de 260.5 y 93.9 m, respectivamente para cada embalse. En caso de existir déficit o derrame, se penalizará con los coeficientes dados por la Tabla 5.

El beneficio esperado máximo para la presa La Angostura se calcula con la expresión

$$BEM = \int_0^{6567} BE dx_1 \quad (8)$$

donde

$$BE = [r(x_1, a_1) - c(x_1, a_1)] * P(m) \quad (9)$$

con $r(x_1, a_1)$ y $c(x_1, a_2)$ las funciones de ganancia y costo, es decir, el beneficio que se obtiene por la energía y las penalizaciones por déficits y derrames; y $P(m)$ la probabilidad de escurrimiento dados por los histogramas de la figura (3) y (4).

Análogamente, para la presa Malpaso, se tiene que

$$BEM = \int_0^{limite} BE dx_1 \quad (10)$$

Manteniendo constante los estados de Malpaso y variando los estados de La Angostura se obtienen las políticas de extracción, cuando se resuelve la ecuación (10) para casos particulares.

En la figura 9 se observa 2 curvas de políticas óptimas que se han graficado para las presas La Angostura y Malpaso, tomando como constantes los niveles en Malpaso. La primera imagen es cuando Malpaso tiene un estado de 600 millones de m^3 , en los meses de noviembre y diciembre. Se puede ver que las extracciones de La Angostura van creciendo hasta un punto máximo de aproximadamente 3500 millones de m^3 , mientras que la extracción de Malpaso es de 1200 millones de m^3 constante.

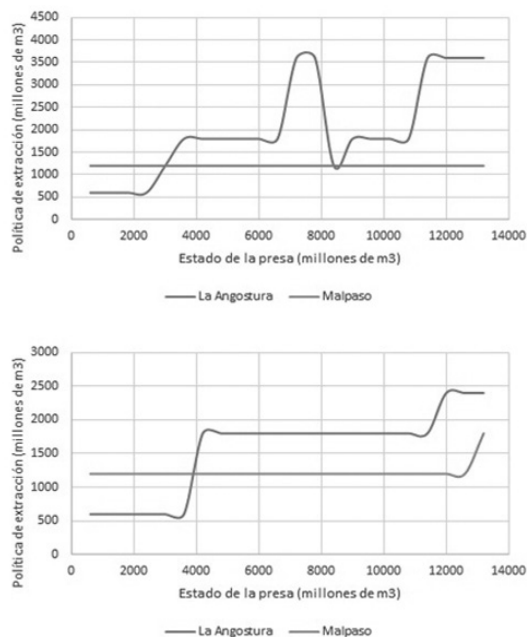


Figura 9. Curvas de políticas óptimas para cada presa

La segunda imagen corresponde a un estado de Malpaso de 3200 millones de m^3 , en el mes de octubre. Se observa una función creciente para la política de extracción de La Angostura y prácticamente una extracción constante en Malpaso, la cual aumenta cuando el estado de La Angostura supera los 12,000 millones de m^3 .

Para cada posible estado de Malpaso, se pueden graficar las distintas curvas de políticas de extracciones dependiendo de la etapa del año.

CONCLUSIONES

Un modelo de control óptimo garantiza que existan políticas óptimas dado un estado inicial de un sistema. Los modelos de Markov permiten conocer la evolución del sistema una vez que se conoce el estado actual del mismo, y la transición de probabilidades permite despreciar los estados pasados y nada más conocer el estado actual. Además, los modelos markovianos involucran ganancias y costos, los cuales establecen los beneficios, que junto a la ley de transición dan a conocer etapa por etapa los datos necesarios.

La ventaja de trabajar con estos modelos radica en poder modelar de una forma más exacta y más real los fenómenos que se estudian, caso particular de este trabajo, la operación de un sistema de embalses en cascada, con el factor aleatorio de los escurrimientos. Tener un registro histórico completo permite una mejor aproximación en las distribuciones probabilísticas, para fines de simulación y estimaciones más exactas de costos y beneficios esperados.

Además, la correlación entre etapas ayuda a agrupar las etapas en meses con información homogénea, en este caso, escurrimientos que provienen de las épocas de lluvias para períodos de sequía o períodos de máximas avenidas.

Otro hecho importante es trabajar con un espacio de estados continuo, en lugar de uno discreto, ya que las funciones matemáticas modeladas pierden menos información. La dificultad de los cálculos se puede solventar gracias a las modernas herramientas de cómputo y técnicas de simulación de grandes cantidades de datos. Si se conocen las ecuaciones de elevación-capacidad, permite intercambiar información de espacios de estados visto en forma de volumen o visto en forma de altura, dependiendo la finalidad.

Por otro lado, el manejo de restricciones a través de desigualdades y funciones continuas, y las diferentes caracterizaciones de las penalizaciones, ayudan a poder garantizar las demandas energéticas establecidas por la CFE y al mismo tiempo las demandas de agua de la CONAGUA, para poder estimar las políticas óptimas de los niveles del embalse.

Finalmente, se observa, que una vez determinada las políticas óptimas de una presa, quedan establecidas las políticas óptimas del embalse aguas abajo; y que las políticas encontradas en forma continua, garantizan que la energía sea la máxima sin poner en riesgo a las poblaciones existentes aguas debajo de cada uno de los embalses, o en caso final, del estado de Tabasco.

Las políticas óptimas obtenidas se traducen en curvas de almacenamiento-extracción de sencillo manejo para el operador de los embalses en las distintas etapas del año.

REFERENCIAS

- Alegría D., A. (2010). Política de operación óptima del sistema de presas del río Grijalva. Efectos de la curva guía. Tesis de Maestría. UNAM, 2010.
- Arganis, J. M. L. (2004), Operación óptima de un sistema de presas en cascada para generación hidroeléctrica tomando en cuenta condiciones reales de operación y el uso de muestras sintéticas para el pronóstico. Tesis Doctoral, UNAM, 2004.
- Avilés, H. R. (1994), Optimización en línea de Presas Hidroeléctricas. Tesis de Licenciatura. UNAM. 1994.
- Bellman, R. E. (1957), Dynamic Programming. Princeton, NJ, USA.
- Berezowsky V. M., Domínguez, M. R., Fuentes M. O. (1983). Manual de diseño de obras civiles. C. F. E. Hidrotecnia. A.2.8. Planeación de sistemas de aprovechamiento hidroeléctrico. México.
- Bertsekas, D. P., Dynamic Programming and Optimal Control, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, Prentice Hall, 1995.
- Butcher, William S. Stochastic dynamic programming for optimum reservoir operation. Paper No. 71011 of the Water Resources Bulletin (Journal of the American Water Resources Association). University of Texas at Austin, Austin, Texas, 1971.
- CFE, 1985. Comportamiento de Presas construidas en México, Vol. VII.
- Costa, O. L. V., Dufour, F. (2012). Average control of Markov decision processes with Feller transition probabilities and general action spaces, J. Math. Anal. Appl. 396, 5869.
- Dantzing, G. B., Linear Programming and Extension. Princeton University Press, New Jersey. USA, 1963.
- Domínguez, M. R., Mendoza, R. R., Arganis, J. M. L. (2001). Revisión de las políticas de operación de las presas Angostura y Malpaso en el Río Grijalva, CFE, informe final.
- Eschenbach, E. et al. Goal programming Decision Support System for Multiobjective Operation of Reservoir Systems. Journal of Water Resources Planning and Management, Vol. 127, No. 2 pp 108-120, Abril, 2001.
- Ford, L. R., Fulkerson, D. R. Flows in Networks. Princeton University Press, USA, 1962.
- Hernández-Lerma, O., Laserre, J. B. (1991). Discrete-Time Markov Control Processes. Basic Optimality Criteria, Springer, Science-Business Media, New York.
- Jacobson, D. H, Mayne, D. Q. Differential Dynamic Programming. Elsevier Science, New York, New York, USA, 1970.
- Lasdon, L. S., Waren, A. D., GRG2 User's Guide. Department of General Business, University of Teax, Austin Texas, USA, 1982.
- Quitana F, F., Aplicaciones de la Programación Dinámica a la Operación de Presas. Tesis. Universidad de Sonora, 1981.
- Sánchez, C. E., Andreu A. J., Expansión óptima de sistemas de recursos hídricos superficiales: Aplicación a un sistema real en España. Universidad Politécnica de Valencia, España, 2002.
- SRGHG (2017). Subgerencia Regional de Generación Hidroeléctrica de Grijalva, División Hidrométrica Sureste, Chiapas, México.
- Vijendra, K. S. M, Yadab (2018). Optimization of reservoir operation with a new approach in evolutionary computation using TLBO and Jaya Algorithm. Water Resources Management, Springer, Julio.
- Wurbs, R. A. Reservoir-System Simulation and Optimization Models. Journal of Water Resources Planning and Management. ASCE, 116, No. 1. pp 52.70, 1993.
- Yakowitz, S. J., Dynamic Programming Applications in Water Resources, Water Resources Research, Vol. 18, pp 673-696, 1982.
- Yeh, W. W-G. System Analysis in Groundwater Planning and Management. Journal of Water Resources Planning and Management, ASCE, 118, No. 3 pp 224-237. 1992.