DESARROLLO HISTÓRICO DEL VECTOR COMO OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO DE LOS PROCESOS DIDÁCTICOS

HISTORICAL DEVELOPMENT OF THE VECTOR AS AN EPISTEMOLOGICAL OBSTACLE OF DIDACTIC PROCESSES

Ortiz y Ojeda Pedro T. [1], Sánchez Iturbe Patricia Gpe. [2], Guadalupe Ortiz Pedro A. [3]

RESUMEN

La historia de las matemáticas se puede considerar como un laboratorio experimental del nacimiento de ideas y de su evolución. En este texto se analizan algunas posturas epistemológicas y su relación en la construcción del concepto de vector, para ubicarlo dentro de la didáctica de las matemáticas. El desarrollo de un concepto matemático se inicia con su génesis, para después evolucionar con avances y retrocesos, este proceso permite entrever los elementos que forman la estructura epistemológica y lo que constituye un obstáculo para el aprendizaje que se desarrolla como un conocimiento lineal y secuenciado.
Palabras Claves: Historia, Epistemología, Didáctica.

ABSTRACT

The history of mathematics can be considered as an experimental laboratory for the birth of ideas and their evolution. In this text some epistemological positions and their relationship in the construction of the vector concept are analyzed, to place it within the teaching of mathematics. The development of a mathematical concept begins with its genesis, and then evolves with advances and setbacks, this process allows to glimpse the elements that form the epistemological structure and what constitutes an obstacle to learning that develops as a linear and sequenced knowledge.
Keywords: History, Epistemology, Didactic.

INTRODUCCIÓN

En el desenvolvimiento de los conceptos matemáticos es importante captar los elementos que tengan consistencia e incidencia en la formación de la cultura matemática formal. Lo sobresaliente no es inventar esos hechos, sino develarlos en sí mismos, por ser creaciones geniales de la humanidad, ya de por si históricas.

Se necesitan estudiar los procedimientos y la lógica en la historia de la matemática para conocer este proceso, así como sus replanteamientos conceptuales, como los del flujo y el cambio, la representación y la realidad, la estructura y la forma; así como la racionalidad, representados en las drásticas rupturas, representadas por las filosofías de Heráclito, Platón, Aristóteles, Descartes, Kant y Comte, que pueden generarse por el devenir evolutivo de una idea o concepto en el tiempo y que inciden sobre los procesos de enseñanza.

Con relación a los procesos de construcción del conocimiento científico, existen rupturas epistemológicas, como el caso del positivismo de Comte, quien según Copleston (2015), se distingue por afirmar que hay una dependencia en los procesos de observación en la construcción de la realidad bajo una subjetividad metodológica. Como en la mecánica, donde la realidad es relativa y provisional según Hegel en Copleston (2015), esto conduce a una explicación de la independencia de los cuerpos respecto a una referencia, en forma uniforme en todos los sistemas.

Como parte de la filosofía, la epistemología no inventa el desarrollo de las nociones de conocimiento, ni su estructura lógica y la verdad que representa,

[1]Profesor, Facultad de Ingeniería- UNACH.ITTG; ptoyomx@yahoo.com
[2]Profesor, Facultad de Ingeniería- UNACH.ITTG, sancheziturbe@yahoo.com.mx
[3]Profesor, ITM. portiz130@gmail.com

sino que éstos se deben extraer de los hechos históricos y del trabajo real de los científicos y matemáticos que las generan y desarrollan como nociones germinales o fundamentales que luego evolucionarán.

La historia es la base de un conocimiento cultural, que siempre ha estado para aclarar las ideas, retirando la apariencia a los eventos ocurridos en el tiempo e investigando el desarrollo de las concepciones realizadas por diversos actores centrales de los eventos científicos.

Según Penrose (2006) las matemáticas, siempre han estado a la altura de los requerimientos sociales y culturales, es de reconocer que la historia de las matemáticas es la autoconciencia del avance del conocimiento científico y su aplicación. Los desarrollos conceptuales de las matemáticas ocurren cuando surgen grandes pensadores, los cuales logran comprender en su época los cambios profundos que ocurren en la técnica y la ciencia que se reflejan en las costumbres, la economía, el arte, etc.

Esta apreciación, por ejemplo en la filosofía cartesiana, facilitó la aceptación de entes matemáticos como los números imaginarios, así como su representación gráfica y por consiguiente la formalización del concepto de número complejo como un concepto numérico, lo que permitió el nacimiento de la variable compleja y fundamentar la teoría de las ecuaciones, como un elemento necesario para establecer una visión integrada de los procesos y alcances que generaron la aparición de cantidades vectoriales y tensoriales, así como creación de espacios matemáticos.

Como consecuencia, aparece la idea de Hamilton en, Mc Mahon (2006), de extender la teoría de los números complejos al espacio de tres dimensiones, con lo que se crea el cuaternión, como un número de cuatro componentes, que tiene la restricción de no ser conmutativo.

El concepto de cuaternión tiene diversos usos teóricos como la solución del teorema de los cuatro cuadrados, la teoría de los números, en la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica, así como en temas relacionados con aplicaciones en electromagnetismo, robótica, análisis de rotaciones en el espacio y su representación computacional.

Partiendo del concepto de cuaternión se desarrolló el producto vectorial, lo que permitía la aplicación de las operaciones vectoriales al estudio del equilibrio, y el del flujo, en diversas áreas del conocimiento como el Análisis y la Dinámica estructural, la Mecánica de fluidos, la Termodinámica, la Hidrodinámica, la Teoría electromagnética, los Circuitos eléctricos, en general en los contextos en los que aparece la física-matemática.

Cuando surge la necesidad de representar los conceptos físicos independientemente del sistema coordenado, por el avance de los conocimientos científicos, aparece la generalización del vector en una forma llamada tensor, su nombre viene de la palabra latina tensus, debido a que en sus inicios se aplicó para explicar los efectos de la fuerza sobre un sólido, actualmente es usado en diversos campos, como la electrodinámica, la relatividad, la mecánica cuántica, el movimiento de los fluidos, la elasticidad y la plasticidad de los sólidos, etc.

ANÁLISIS

El estudio de la forma y el número tiene su origen en las antiguas civilizaciones de Mesopotamia y Egipto, pero existe una ruptura con la sistematización científica, a través de la dialéctica y la ontología de estos concepto por Euclides de Alejandría en el siglo III A.C., en una obra llamada los Elementos, en la que recopilaba el saber matemático, usando la construcción axiomática, por medio de definiciones, postulados y axiomas, que se utilizaban para demostrar teoremas y a partir de ello, otros teoremas.

Se considera que una demostración matemática consiste en mostrar de manera clara la veracidad o falsedad de una proposición con una secuencia lógica y estructurada de argumentos que son llamados axiomas o proposiciones demostrados con anterioridad.

En el libro Elementos de Euclides, Euclides (2000), se establecen cinco nociones que se consideran verdaderas como elementos lógicos en la construcción de todo conocimiento matemático, cierto y válido, las cuales son: 1.- Las cosas que son iguales a una misma cosa, son iguales entre sí. 2.- Si iguales son sumados a iguales, los totales son iguales. 3.- Si iguales son sustraídos de iguales, los restos son iguales. 4.-Las cosas que coinciden entre sí, son iguales entre sí. 5.- Todo es mayor que la parte.

Entre las definiciones se encuentra que el punto es lo que no tiene partes, lo que permite considerar a este elemento conceptual como la piedra angular de la construcción del edificio geométrico, puesto que a partir de esta idea se establece a la línea como una longitud sin anchura, partiendo de una sucesión de puntos que se acumulan en forma continua para generar una extensión.

También se considera que la línea está formada por dos puntos en sus extremos, de manera que por dos puntos pasa una recta y solo una, lo que conduce a definir la distancia como la magnitud de un segmento lineal con una métrica apropiada, en la que se puede establecer una dirección y si es necesario un sentido. También la línea puede ser curva.

Una superficie se puede considerar como generada por un conjunto de rectas continuas, de manera que sus extremos estén definidos por las mismas líneas, caracterizando entonces la longitud y la anchura de un plano, por lo que una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.

En los Elementos, no se encuentra referida la palabra espacio, se mencionan cuerpos o sólidos, y se utiliza el término cuerpo para no establecer una coincidencia con dimensión, ni con la idea de su superficie, ni con la capacidad de su representación gráfica.

Otro elemento sobresaliente es la concepción del cálculo diferencial e integral, que se origina por una ruptura epistémica del devenir del ente, como un continuo nacimiento y destrucción, del que nada queda fuera, como un elemento teórico que incide de manera definitiva en la construcción de una nueva geometría cinemática, que vino a explicar la naturaleza newtoniana del cosmos y la aparición del concepto primitivo de vector, para definir los movimientos de cuerpos celestes.

El término abscisa y ordenada fue aplicado por Leibniz en una fecha cercana 1692. Con estas ideas el espacio físico quedo relacionado directamente con el espacio matemático, facilitando la representación de las funciones y por consiguiente el establecimiento intuitivo del teorema fundamental del Álgebra. El uso de la representación numérica en un sistema de ejes coordenados cartesianos fue utilizado por Newton, quien inclusive representó también a los negativos.

En este contexto Nahin (2008), señala que la solución de ecuaciones de segundo grado conduce a soluciones en las que aparecen resultados con números reales, junto con otros que Descartes llamó imaginarios y que tienen su origen en la solución de una ecuación cuadrática por Diofanto, condición que desarrolló la idea de los números complejos, cuyos antecedentes se encuentran en los trabajos de Cardan, Collette (1985). Es de reconocer que Bombelli desarrolló ampliamente el cálculo de operaciones con números complejos, estableciendo el nacimiento de los estudios de la variable compleja.

El símbolo del número imaginario es una invención de Euler, según Maor (1994), este además estableció que al resolver una ecuación polinómica, sus raíces se obtienen en pares conjugados, así mismo desarrolló la fórmula, $e^{xi} = \cos x + i\ senx$, obtenida a partir de establecer que los logaritmos de los números negativos son complejos y no reales.

La fórmula de Euler, permitió la interpretación de los números complejos en un plano, como punto que se define en términos de coordenadas (x,y), conclusión a la que llegó Wessel, al multiplicar segmentos lineales a partir de la idea de Wallis, de la suma de segmentos dirigidos. La otra aportación fundamental de Wessel, fue el desarrollo de dirección de los segmentos resultantes con base a la suma de los ángulos de inclinación de cada segmento individual.

De manera que al relacionar el eje cartesiano de x, con los números reales y el eje cartesiano con el eje y, Wessel, definió el plano complejo y con esto se dió él inicio de la variable compleja y la teoría de los espacios matemáticos. Además de asociar el segmento dirigido, con la idea de conducir de un lugar a otro, sobre el plano complejo, usando la idea de radio vector con magnitud, dirección y sentido análogo al concepto utilizado por Galileo para describir el movimiento y por Newton para definir el movimiento planetario alrededor del sol.

La generalización de la representación Collette (1985) de los números complejos del plano hacia el espacio tridimensional, fue una propuesta del matemático Hamilton en 1843, Collette (1985) y Mc Mahon (2006), quien lo hizo con base a los llamados cuaterniones, producto de la reflexión de la filosofía Kantiana que considera que el espacio pertenece a la Geometría y el Álgebra al tiempo, de manera que en los cuaterniones, el tiempo es un escalar y el espacio está definido por las restantes coordenadas reales, todos son una extensión de los números reales de forma que al añadir a estos números reales las unidades imaginarias *ijk* , se tenga: $i^2 = j^2 = k^2 = \mathbf{ijk} = -1$

Los cuaterniones no cumplen con la propiedad conmutativa, pero si con la asociativa en el producto exterior, esto no se aplica al producto vectorial por estar definido dentro del Álgebra de Lie o de las transformaciones infinitesimales, la transición de los cuaterniones al análisis vectorial se da en el contexto de un Álgebra asociativa la cual generaliza a los complejos, hacia los cuaterniones, llamada Álgebra de Clifford. Se puede considerar al Álgebra de Grassmann como un caso degenerado del Álgebra de Clifford, según Penrose (2006).

La propuesta de Clifford es tomar el producto de los vectores en forma separada del cuaternion que está formado por la suma de un componente escalar o real y una imaginaria o pura que se le denomina vector, siempre se le habían considerado a estas dos partes como un mismo y único producto.

Al definirse el producto vectorial, junto con la suma, ya se perfila el Álgebra vectorial en forma. También se empieza a considerar al vector como una función del tiempo en el sentido del espacio newtoniano, considerando al tiempo como una coordenada que es independiente del espacio y sus coordenadas y es considerada como una magnitud que es igual para cualquier observador que la use en un marco de referencia euclidiano. Es la aparición del Cálculo vectorial, que tiene como pioneros a Gibbs y Heaviside, de acuerdo a Kay (1988).

Estos dos autores parten de la idea de los cuaterniones y de las propuestas electromagnéticas de Maxwell, para desarrollar los elementos de análisis del flujo eléctrico y magnético con la aparición de operadores diferenciales para indicar el cambio o variación, en particular con la herramienta fasorial en el caso de Heaviside, cuando se estudian los circuitos de corriente alterna. Con la aparición de los teoremas de Green, Gauss y Stokes, el cálculo vectorial ya queda estructurado en forma definitiva.

Con el advenimiento de la teoría de la relatividad de Einstein, se genera otra ruptura conceptual como consecuencia de la postura epistémica de Heráclito sobre el espacio y el tiempo en los que, ya no serán considerados como conceptos separados, independientes y absolutos. La relatividad del observador adquiere importancia que depende del marco de referencia en que se encuentre ubicado en el espacio, por consiguiente el tiempo será también relativo en su referencia (Penrose, 2006).

En el desarrollo de la teoría de la relatividad, se considerará que el concepto de espacio vectorial se construye con base a una estructura usando la suma y la multiplicación de vectores por números, aplicable estos procesos para números reales y complejos. Una transformación lineal de un espacio vectorial lleva este espacio a otro, conservando la estructura definida inicialmente. Está transformación se puede representar en forma explícita usando un ordenamiento numérico llamado matriz.

Tomando en cuenta los números reales, así como el espacio geométrico ordinario, con una métrica euclidiana, entonces los números reales representan a los tensores de orden o rango cero, llamados escalares, que cuentan con un componente o dimensión, su magnitud es independiente del sistema coordenado utilizado y físicamente representan algunas dimensiones o propiedades de los sistemas, por ejemplo a la temperatura.

El tensor de orden uno, es llamado vector, con tres componentes, magnitud, dirección y sentido; para un grado de libertad se pueden usar para representar curvas; con dos, a las superficies, con tres a los volúmenes y con n componentes elementos de n dimensiones. El tensor de segundo orden tiene nueve componentes, representa a una magnitud con dos direcciones, así con cero grados de libertad es una matriz cuadrada, para dos, superficies y para n grados elementos de n dimensiones en general.

Los tensores se pueden desarrollar para diferentes espacios, dimensiones, diversos órdenes y componentes, que sean adecuados para representar entidades o variables en términos de valores y componentes, como son: la altura topográfica, la velocidad, la aceleración, la tensión, la deformación, etc. Así los tensores poseen propiedades que son adecuadas para la simplificación de expresiones y la representación de elementos que se caracterizan por tener múltiples dimensiones en el espacio.

DISCUSIÓN

Los espacios, las dimensiones, los órdenes y componentes de un tensor están relacionados con la objetividad del conocimiento, es decir con relación al objeto que tiene de por medio el atributo de la verdad y que se constata con la verificación del pensamiento o juicio en el objeto mismo.

En el caso de que algo no se pueda comprobar, no se puede afirmar, entonces si no es posible afirmar que exista un verdadero conocimiento, es porque al tener nada más que el enunciado, no es garantía de que se establezca la verdad.

Por lo que es necesario demostrar las proposiciones las que producirán una mayor garantía del saber. El problema es realizar la demostración, no siempre puede realizarse y cumplirse, y en ocasiones no se tienen todas las facetas con las puede aparecer la verificación del conocimiento, así como su equivalencia a los conceptos relacionados con la verdad.

La prueba es un elemento fundamental, como el caso de la existencia de los números complejos, que desarrollaron diversas formas de comprobación hasta encontrar la forma de operación y representación en forma analítica y gráfica de esos números.

Es de reconocerse que el análisis epistemológico (Harada, 2005) parte en que:

"La principal virtud de cuasi-empirismo, es como ya dije, que ha traído consigo un cuestionamiento de algunas dicotomías en la que descansa nuestro pensamiento [sic] (por ejemplo lo empírico y lo formal, lo analítico y lo sintético, lo a priori y lo posteriori, el descubrimiento y la justificación, etc.) que suelen ser aceptados como si fueran universales, necesarias y hasta eternas, con lo cual nos obliga a revisar nuestra concepción del conocimiento, de la realidad y de nosotros mismos. (p. 37)"

Como consecuencia se puede considerar que toda acción humana es imperfecta por la capacidad limitada que tiene el hombre para relacionarse con el medio usando sus sentidos, como es el proceso didáctico de la matemática escolar, pero que la razón y su aplicación consecuente con la realidad permiten llegar a una certeza limitada pero efectiva para la construcción de significados válidos en un contexto y circunstancia como lo fue el paso de una postura positivista a una relativista del conocimiento epistemológico de las matemáticas.

Aquí aparece la idea de que existen diversas posturas epistemológicas, desde las de origen griego hasta las contemporáneas, caracterizadas por los conceptos de flujo y el cambio, la representación y la realidad, la estructura y la forma, de esta manera la construcción del conocimiento matemático, se caracteriza por darse en el tiempo por fases o periodos conclusivos, es decir momentos en los que sintetiza o integra el conocimiento formando un sistema, el cual se define en términos históricos en forma conclusiva o paradigmática.

La indicación del desarrollo evolutivo se manifiesta en la dualidad que tiene el concepto matemático en la historia, primero visto como una secuencia temporal de eventos, como es el caso del tensor, que se partió desde el desarrollo del concepto euclidiano de línea, posterior a la solución de ecuaciones algebraicas y al desarrollo del espacio, como consecuencia de la separación del concepto de sólido y cuerpo.

Segundo, por la importancia que se asigna a los diversos grados de valor como consecuencia de la utilidad implícita del concepto matemático en el presente, pero con el potencial de ser desarrollado.

De la primera consideración se puede establecer el concepto corriente de la historia, el ser considerado como un rastro depositado en el tiempo pretérito. Es de suponer que las ideas que se forman en la mente es producto de una época y de la forma que se presenta lo que es llamado: Zeitgeist (el signo de los tiempos) expresados en la filosofía Hegeliana.

Es decir las ideas epistemológicas embonan en la filosofía, a la vez es la filosofía un derivado con respecto al ser mismo de la historia, como manifestación dinámica de la existencia y evolución de los conceptos en general. Por lo que se puede considerar que es el origen o raíz que caracteriza a la epistemología es la filosofía y ella a su vez en el tiempo al que le tocó pertenecer.

De la segunda se considera que la historia se representa en posturas con diferentes grados o niveles de autenticidad que tienen su origen en una categoría implícita de valor que le asigna la aplicación posterior en otros conceptos o temas utilizados para la construcción de un conocimiento lógico, con una estructura que tenga validez y certeza para representar resultados de acuerdo al objeto del conocimiento.

Por lo anterior se puede considerar que lo histórico se desarrolla con una sucesión de elementos de verdad, que se van superando unos a otros a medida que el pensamiento y el conocimiento matemático evoluciona, obedeciendo a su propia imperfección y la necesidad que ellos mismos progresen a medida que logra el pensamiento deserrado, su integración en nuevas propuestas creativas.

CONCLUSIONES

Cada postura epistemológica, tales como la helénica (Heráclito, Platón, Aristóteles), la renacentista (Descartes, Locke) y la decimonónica (Hegel, Kant y Comte), representa un instante que se transforma en un momento histórico de la integración de un sistema general y su visión múltiple corresponde al variado requerimiento de los problemas de representación, explicación y formalización, teniendo como elemento fundamental la continuidad evolutiva del conocimiento científico, el producto del cambio, la representación, de la estructura y la forma, así como la racionalidad.

En este sentido se puede citar: "Lejos de una explicación plausible de la naturaleza de la demostración matemática, el constructivismo de Kant se veía, a finales del siglo XIX, como algo lleno de defectos, considerado así por muchos matemáticos. Las objeciones eran numerosas: ¿Es acaso inevitable el recurso a la intuición en las demostraciones? Si los teoremas se siguen necesariamente de los axiomas, ¿no deberían bastar para su demostración ciertos argumentos lógicos? Lo que en tiempos de Kant fue una explicación satisfactoria, a finales del siglo diecinueve parecía una impertinencia: ¿Cómo es que las proposiciones de la geometría se infieren de los axiomas de Euclides, a la vez que sus demostraciones se apoyan regularmente en objetos construidos en la intuición? "(Torres, 2005).

En el desarrollo del concepto de tensor intervienen diversos momentos, que se pueden caracterizar a partir de la historia de la geometría, junto con la vertiente cultural de la filosofía que permea en el pensamiento de cada actualidad y por supuesto, la manera que se aborda en la matemática escolar.

Esa interrelación mutua del espacio y el tiempo, es producto de la concepción del pensamiento vigente de una determinada época y desde luego explicado por la filosofía en su versión paradigmática vigente en una determinada época, lo que puede ser una vertiente que detone los procesos didácticos para la enseñanza.

Desde una perspectiva amplia la evolución del concepto de tensor, como un vector generalizado, el orden creciente del tensor permite representar, dos elementos el primero es el espacio y el segundo el tiempo, por medio del escalares, vectores o tensores en general, es decir tensor de orden cero, el vector tensor de orden uno y así sucesivamente.

Históricamente, para lograr describir la interrelación espacio-tiempo, en un contexto coherente fue necesaria la aparición de las herramientas matemáticas desarrolladas a partir de la relación desvinculada del espacio geométrico en primer lugar y luego su movilidad relacionada con el tiempo, con marcos de referencia independientes.

La concepción anterior se sintetiza en la idea de que las posturas epistemológicas son fases o momentos que integran de un sistema de conocimiento que se pronuncia por medio de la historia. La forma en que desarrolla la evolución de las ideas se observa en el doble sentido que tiene el concepto de lo histórico en cuanto a una sucesión temporal y por los grados de valor y certeza con la del objeto y su naturaleza real, lo que tiene efectos sobresalientes en la matemática escolar en el desarrollo de proceso y estrategias didáctica para la enseñanza del vector.

REFERENCIAS

Bachelard, G. (1993) La formación del espíritu científico. México. Edit. FCE.

Collette, J. P. (1985) Historia de las matemáticas. España. Edit. Siglo XXI.

Copleston, F. (2015) Historia de la filosofía. España. Edit. Ariel.

Euclides (2000) Elementos. España. Edit. Gredos

Harada, O. E. (2005) Cuasi-empirismo en la filosofía de las matemáticas. México. BUAP. Recuperado de http://www.elementos.buap.mx/num59/htm/15.htm el 10 mayo del 2018.

Kay, D. C. (1988) Tensor calculus. USA. Edit. Mc Graw-Hill.

Mc Mahon, D.(2006) Relativity Demystified. USA. Edit. Mc Graw-Hill.

Torres, A. C. (2005) Kant visto desde las matemáticas. México. UNAM. Recuperado de http://www.revista.unam.mx/vol.6/num1/art06/ene_art6.pdf el 12 mayo del 2018.

Maor, E. (1994) e The story of a number. USA. Edit. Princeton University Press.

Nahin, P.J. (2004) Esto no es real. La historia de i. México. Edit. CONACULTA-Libraria.

Penrose, R. (2006) El camino a la realidad. México. Edit. Random House