

# DISEÑO DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE LA NOCIÓN DE RAZÓN DE CAMBIO

DESIGN OF A DIDACTIC SITUATION FOR THE STUDY OF THE NOTION OF CHANGE REASON

Humberto Manuel Gómez<sup>1</sup>, Cristóbal Cruz Ruiz<sup>2</sup>

## RESUMEN

*Se presenta un diseño adaptable a situaciones del proceso enseñanza-aprendizaje en los temas derivados del Cálculo en el contexto hidráulico de la Ingeniería Civil. Surge frente a los retos estudiantiles en materias avanzadas para su formación académica. Se realiza mediante el enfoque del Pensamiento y Lenguaje Variacional considerando la noción de razón de cambio.*

**Palabras Claves:** Razón de cambio, Pensamiento y Lenguaje Variacional.

## ABSTRACT

It presents a design adaptable to situations of the teaching-learning process in the topics derived from Calculus in the hydraulic context of Civil Engineering. It arises in response to the challenges faced by students in advanced subjects for their academic training. It is carried out by means of the thought and language variational approach considering the notion of change ratio.

**Keywords:** Change Ratio, Thought and Language Variational.

## INTRODUCCIÓN

Se propone en esta investigación, construir la noción de Razón de Cambio utilizando como pretexto al fenómeno hidráulico de vaciado de recipientes. Utilizaremos la simulación de este fenómeno ya que con el uso de la geometría dinámica (GeoGebra) se pueden manipular las variables que en la experimentación pueden ser un factor que impida llegar a los resultados esperados. Dado que la simulación nos permite también generar las gráficas, nosotros pretendemos que el estudiante las interprete y argumente lo que sucede en relación al vaciado del recipiente que observa.

El uso de la simulación en el fenómeno de vaciado de recipientes, contribuirá principalmente a la construcción de la noción de variación y al desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), y esto se logrará a través de tres acciones que se deben involucrar en el diseño de las actividades didácticas:

1. Medición del cambio.
2. Análisis de la forma en como esa medida evoluciona.
3. Reconocimiento de por qué las variables cambian de la forma en que lo hacen.

Tomando en cuenta las acciones mencionadas anteriormente, se realiza el diseño de las actividades didácticas y se presentarán ante un grupo de tercer semestre de la licenciatura en Ingeniería Civil, en tres fases diferentes en donde se pretende observar a través de los argumentos de los estudiantes la construcción de la noción de variación y por consecuencia la construcción de la noción de Razón de Cambio.

## SISTEMA DE REFERENCIA VARIACIONAL

Con el fin de explicar la forma en como la variación es construida en situaciones de cambio, se esta-

<sup>1</sup> Maestrante en ciencias con especialidad en matemática educativa. Facultad de Ingeniería- Universidad Autónoma de Chiapas.

<sup>2</sup> Docente de la Facultad de Ingeniería UNACH

blece como marco teórico, lo que Caballero (2018) llama sistema de referencia variacional, que surge de la articulación teórica de las nociones de causalidad y temporización, en las que causalidad se entiende como la dependencia que existe entre las variables y la temporización se entiende como la construcción de estados intermedios en el desarrollo del fenómeno para predecir estados futuros.

La causalidad y temporización atiende diferentes aspectos de la variación que se resumen en las interrogantes ¿Qué cambia?, ¿respecto de que cambia?, ¿Cuánto cambia?, ¿Cómo cambia?, ¿Por qué cambia de esa manera? La causalidad, al consistir en establecer una relación entre variables (¿Qué cambia?), precisa que dichas variables sean reconocidas como tales (¿respecto a que cambia?), lo que requiere de mecanismos de cuantificación (¿Cuánto cambia?). en cuanto a la temporización, esta favorece que el cambio sea analizado a través de los estados construidos (¿Cómo cambia?). por último, al considerar en conjunto a la causalidad y la temporización se construye una racionalidad sobre la variación del fenómeno (¿Por qué cambia de esa manera?), ya que el comportamiento observado se analiza en función de la relación que se establece y los estados que se construyen (Caballero, 2018, p. 90).

El sistema de referencia variacional surge de la forma en que se articulan las preguntas mencionadas anteriormente, considerando los elementos que lo conforman, la relación de variables (lo que se percibe que cambia), el elemento de referencia (como se reconoce el cambio), la unidad de medida (como se mide la intensidad del cambio) y la temporización (como se reconoce la evolución del cambio) (Caballero, 2018). A continuación, se describe cada elemento que forma parte de un sistema de referencia variacional.

**Relación de variables:** Los fenómenos de variación continua se caracterizan por la posibilidad de presentar simultáneamente diversas variables que se modifican continuamente que pueden coincidir con las de una función o pueden ser diferentes a ellas. Cabe mencionar que al estudiar la variación estamos abordando todos aquellos aspectos en los que existe un cambio, pero también es muy importante centrar la atención no solo en las variables, sino en la rela-

ción que se establece entre ellas.

En nuestra investigación estamos tratando con las variables tiempo, altura, entre otras, sin embargo, la relación que se establece entre estas dos es muy importante ya que el tiempo no podemos controlarlo a voluntad, por lo tanto, la variable altura depende del tiempo de vaciado del recipiente. Es por esto que es necesario considerar este elemento del sistema de referencia variacional.

**Elemento de referencia:** Para estudiar el cambio en un fenómeno debe existir un referente para verificar una modificación y que al mismo tiempo sirva para medir el cambio, es decir, la unidad de referencia nos permite establecer “respecto a que cambia” una variable en un determinado fenómeno.

También existe otra forma de interpretar la unidad de referencia mediante comportamientos que ya son conocidos, lo que permite compararlos con nuevos comportamientos o si existen algunas modificaciones de un comportamiento previo, es decir, tomar un comportamiento como modelo para comparar comportamientos similares.

**Unidad de medida:** Se refiere a la cuantificación del cambio dentro de la variación en un determinado fenómeno, por lo que es necesario considerar el uso de estrategias y herramientas que permitan realizar esta medición, para establecer una magnitud mediante la comparación de dos elementos.

En Buendía (2006) se reporta que al predecir el comportamiento de un móvil a través de su gráfica hay una búsqueda de alguna unidad fundamental para comparar los estados futuros con el presente, búsqueda que inicia con la descripción y entendimiento del tipo de movimiento. Observamos que se constituye un referente para caracterizar el tipo de movimiento a partir del análisis de cómo cambia la distancia para lapsos específicos (Caballero, 2018, p. 94).

La unidad de medida no es específicamente una cantidad estandarizada con una magnitud (por ejemplo, metro-longitud), sino como el elemento que permite medir el cambio en una variable mediante la comparación entre dos elementos, la cantidad que se mide y la cantidad con la que se mide, es decir, “cuánto cambia”. También cabe mencionar que esta medición del cambio no siempre es una magnitud exacta y en ocasiones puede ser aproximada. En nuestra investigación los estudiantes deberán esta-

blecer aproximaciones para poder predecir el comportamiento de ciertas gráficas que representen un fenómeno en donde es necesario identificar la unidad de referencia, como se describe anteriormente, y así comparar para disponer de una unidad de medida. Esto se le conoce como medición descriptiva del cambio, la cual no involucra valores numéricos, sino en la expresión de las características y descripciones, así como: es más grande/pequeño que, más alto/bajo que, más rápido/lento que, crece/decrece cada vez más/menos, etc. (Caballero, 2018).

Por otro lado, la cantidad de cambio también puede medirse de manera numérica cuando se asigna un valor a una determinada cantidad, esta medición puede efectuarse multiplicando la unidad de referencia (es el doble de, la mitad de, etc.), o también pueden establecerse valores específicos mediante la medición utilizando alguna herramienta (un flexómetro, una cuadrícula, etc.), o utilizando formulas o algoritmos que provienen de teoremas ya establecidos por la Matemática.

**Temporización:** Como ya se mencionó anteriormente, consiste en construir estados intermedios para analizar el proceso de variación de las variables, es decir, el análisis de cómo cambia. Esto no necesariamente se refiere a considerar al tiempo como variable de estudio, aunque por la naturaleza del fenómeno que tratamos en nuestra investigación es una variable indispensable.

La temporización comprende dos sentidos: el primero es la identificación de estados que son sugeridos o explícitos en alguna actividad o situación, por ejemplo, en el caso de una tabla numérica se puede considerar estados a cada uno de los valores numéricos de la variable dependiente, mientras que, en una gráfica se puede considerar estados a cada uno de los valores del eje horizontal en caso de que este cuente con una escala numérica explícita. El segundo sentido consiste en la construcción de los estados al no ser explícitos en la situación planteada, por ejemplo, al establecer valores específicos de las variables en una gráfica que no cuente con una escala explícita, o al reconocer instantes de tiempo específicos en el movimiento de un cuerpo (Caballero, 2018, p. 96).

La temporización establece la construcción de estados intermedios, sin embargo, también es nece-

sario considerar el número de estados de un determinado fenómeno, principalmente se identifican dos casos: estados extremos y estados intermedios. Los estados extremos son aquellos en donde se considera un estado inicial y otro estado final, estos pueden coincidir con el principio y fin del fenómeno, o también pueden ser los extremos de un determinado intervalo. Ahora bien, para ejemplificar el caso de los estados extremos Caballero (2018) presenta la gráfica de la siguiente (Imagen 1) en donde los estados que se identifican no corresponden con “el inicio y el final” de la gráfica, sino a dos puntos que conforman un intervalo del dominio.

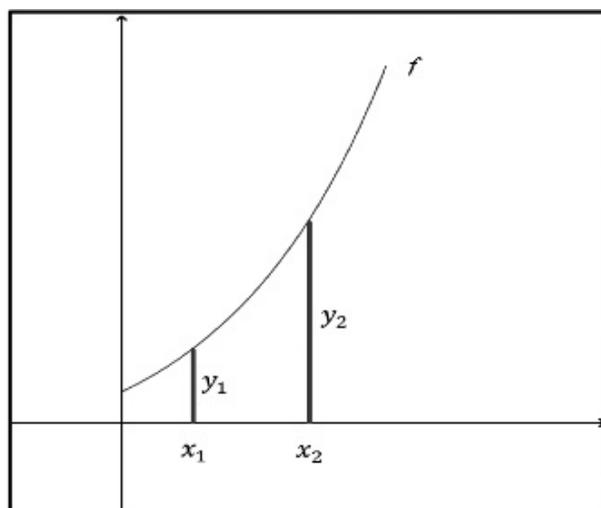


Imagen 1. Ejemplo de una temporización de estados extremos (Caballero, 2018, p. 97)

Ahora bien, si tratamos con los estados intermedios es necesario considerar más de dos estados dentro del desarrollo del fenómeno, los cuales describen su comportamiento. Esto permite realizar un análisis de la variación entre un estado y otro, por lo tanto, las gráficas adquieren cierto “movimiento” lo que contribuye a la construcción de ciertas nociones relacionadas al PylV.

En resumen, la noción de sistema de referencia variacional consiste en el reconocimiento y la forma en que se organiza el cambio, la construcción de la variación por un individuo ante una situación de predicción, lo cual tiene lugar mediante el desarrollo de las nociones de temporización y de causalidad (Caballero, 2018). La noción de sistema de referencia variacional se desarrolla según sea la situación de

variación planteada que se ve afectada por el tipo de fenómeno que se esté tratando vinculado a las experiencias y el entorno social. A continuación, se presenta un esquema (Imagen 2) que propone Caballero (2018) en donde se sintetizan los elementos del sistema de referencia variacional, y los cuestionamientos que se relacionan con cada elemento del sistema.

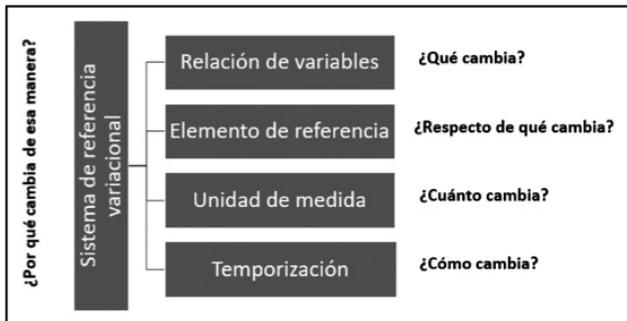


Imagen 2. Elementos del sistema de referencia variacional (Caballero, 2018, p. 99)

## DISEÑO DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

Con base en el esquema metodológico para la investigación socioepistemológica (Montiel & Buendía, 2012) se diseñó la situación didáctica mediante tres actividades que se llevarán a cabo en tres sesiones, en las cuales los alumnos atenderán problemas relacionados al fenómeno de vaciado de recipientes con diferentes geometrías, aunque se realizará una breve introducción para que los estudiantes recuerden algunos conceptos que se abordan en el fenómeno de llenado de recipientes; así también tendrán que argumentar gráficamente el comportamiento de cada fenómeno.

### Actividad 1. Llenado de Recipientes Conocimientos y habilidades

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes recuerden ciertos conceptos que de alguna manera han construido en su formación académica y los utilicen en un “fenómeno real”, en este caso el llenado de recipientes, realizando un análisis variacional en donde se identifica la forma en que evoluciona el fenómeno, para poder determinar la gráfica que lo representa.

#### Intenciones didácticas

Se pretende explicar en clases el fenómeno de

llenado de recipientes proponiendo una actividad grupal en la que se muestran tres recipientes con diferentes geometrías y las tres gráficas que se los representan, sin indicar que gráfica le corresponde a cada recipiente, con el objetivo de que el estudiante identifique que gráfica le corresponde a cada recipiente en relación a la forma en que este se llena con un flujo constante, y argumente sus repuestas con el fin de hacer visibles los elementos que son parte de este tipo de fenómenos.

#### Consideraciones previas

Es necesario considerar que los estudiantes tienen conocimientos relacionados con aspectos básicos de la hidráulica, así como también las ideas de pendiente, velocidad y algunas fórmulas básicas utilizadas en la materia de Cálculo Integral, esto para poder realizar la modelación analítica del fenómeno. También es necesario que los estudiantes exploren de manera general el software (GeoGebra).

**Actividad 1.** Considerando que los siguientes recipientes (Imagen 3) se están llenando con un flujo constante, identifica y relaciona que gráfica representa el llenado del recipiente según su geometría y explica tu respuesta. Donde  $H$ = Altura total,  $R$ = Radio superior,  $r$ = Radio inferior.

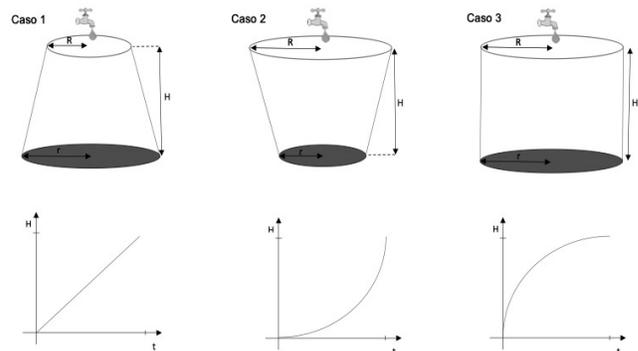


Imagen 3. Actividad 1. Llenado de recipientes

### Actividad 2. Vaciado de Recipientes

#### Actividad 2.1

#### Conocimientos y habilidades

Se pretende que los estudiantes construyan la noción de variación mediante situaciones predictivas analizando el comportamiento del fenómeno de vaciado de recipientes con diferentes geometrías, tomando en cuenta que en el recipiente que se está vaciando influyen factores como la presión que ejerce el agua,

el radio es mayor o menor que antes, etc.; y representando lo que observa en gráficas que relacionan la altura con el tiempo de vaciado.

### Intenciones didácticas

Se les proporcionaran hojas con las actividades con el objetivo de que los estudiantes las realicen y que argumenten sus respuestas para analizar de qué manera enfrentan este tipo de problemas y los conocimientos que ponen en juego en la realización de las gráficas que se les pide.

### Consideraciones previas

Los alumnos actualmente cursan la materia de ecuaciones diferenciales por lo tanto hay que considerar que los estudiantes tienen conocimientos previos sobre el fenómeno de llenado de recipientes, así como el análisis de sus gráficas y como cambian según la geometría del recipiente debido a la variación que se presenta en el radio a medida que se va llenando.

**Actividad 2.1.** Considerando que los recipientes que se muestran a continuación (Imagen 4) se encuentran completamente llenos y se están vaciando por un orificio de radio  $R_s$ , realiza la gráfica que representa este vaciado y explica tu respuesta. Donde  $H$ = Altura total,  $R$ = Radio superior,  $r$ = Radio inferior,  $R_s$ = Radio del orificio de salida.

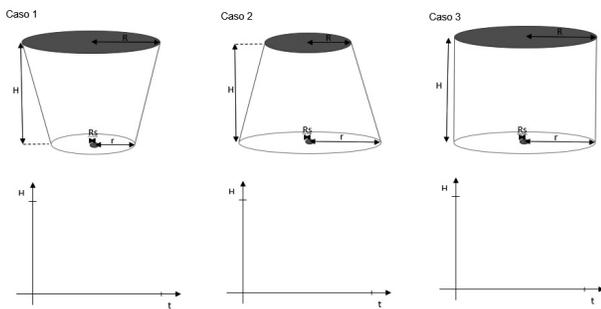


Imagen 4. Actividad 2.1. Vaciado de recipientes

### Actividad 2.2

#### Conocimientos y habilidades

Se pretende que los estudiantes confronten las representaciones realizadas en la actividad anterior con las presentadas en la actividad 1.2 para corregir, si por alguna razón interpretaron mal la actividad, o para reafirmar lo que realizaron según sea el caso,

y así obtener una resignificación del conocimiento mediante una situación predictiva.

### Intenciones didácticas

Después de realizar la actividad anterior, se les proporcionara hojas con las actividades en donde se presentan unas gráficas dentro de las cuales están las que representan el fenómeno de vaciado de recipientes según su geometría, con el objetivo de que los estudiantes comparen sus gráficas con las presentadas en la actividad y que indiquen si coinciden, y en el caso de no coincidir elegir cual es la que es correcta según su apreciación y argumentar por que cambia de opinión, al final indicar cualitativamente cuál es el recipiente que se vacía más rápido. Todo esto con el propósito de comprobar si existe una construcción del conocimiento.

### Consideraciones previas

Se debe considerar que se deben explicar bien las instrucciones para que los estudiantes puedan realizar la actividad y lleguemos a los objetivos, ya esta actividad depende de la anterior. También se debe explicar a los estudiantes que no es una evaluación, por lo tanto, es importante no borren sus respuestas, en el caso de realizar un procedimiento equivocado, ya que es lo que nos permitirá analizar de qué forma puede lograr una resignificación del conocimiento.

**Actividad 2.2.** Compara las gráficas realizadas con las que se muestran (Imagen 5) a continuación e indica si coinciden. Si cambias de opinión indica cuál es la que representa el vaciado y explica por qué.

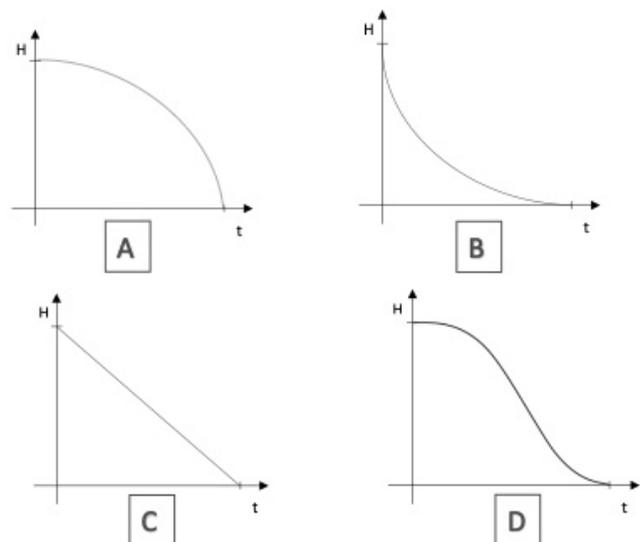


Imagen 5. Actividad 2.2. Gráficas comparativas

Cabe mencionar que el proceso de modelación y simulación del llenado y vaciado de recipientes se encuentran en los siguientes links: <https://www.youtube.com/watch?v=f7JWKnmskLY>, <https://www.youtube.com/watch?v=57Qy2w8yr6c&t=620s> (Manuel, 2018) en la plataforma YouTube, el cual será proporcionado a los estudiantes para aclarar sus dudas y puedan construir cuantas veces quieran la simulación del fenómeno de llenado y vaciado de recipientes con diferentes geometrías.

### Actividad 3. Evaluación

#### Actividad 3.1

#### Conocimientos y habilidades

Se pretende que los estudiantes, mediante el desarrollo del PyLV, puedan establecer una relación entre el comportamiento de la gráfica y la forma del recipiente que se está llenado utilizando los elementos que surgieron en las actividades anteriores como la variación de la altura del agua respecto al tiempo, con el objetivo de hacer visible la construcción del conocimiento mediante la predicción utilizando una situación de variación.

#### Intenciones didácticas

Esta actividad se presenta ante el grupo para que se resuelva de manera individual en donde los estudiantes deben de realizar un análisis del comportamiento de la gráfica para poder predecir la forma que tendrá el recipiente al llenarse. Para esto los estudiantes tendrán cinco minutos para responder.

#### Consideraciones previas

Es necesario considerar que, con la realización de las actividades anteriores, los estudiantes tienen más elementos para esta actividad, como por ejemplo la noción de variación y el desarrollo del PyLV, por lo tanto, estarán familiarizados con los conceptos y será más fácil su realización.

**Actividad 3.1** Dada la siguiente gráfica (Imagen 6) que representa el llenado de un recipiente con gasto constante, dibuje la forma del recipiente.

#### Actividad 3.2

#### Conocimientos y habilidades

Se pretende que, mediante la comparación de dos recipientes similares, los estudiantes reafirmen los conocimientos construidos respecto a la relación

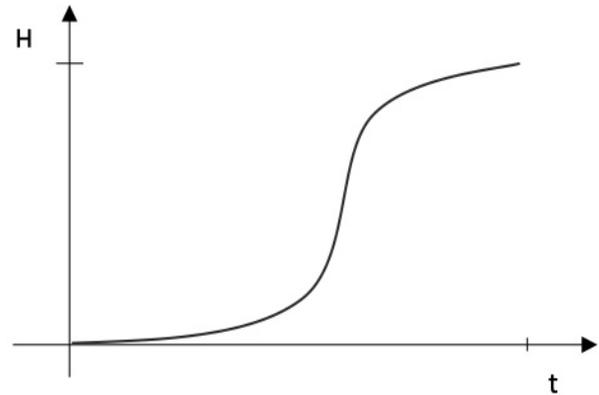


Imagen 6. Gráfica Modelado de recipiente

que existe entre el tiempo de llenado y las dimensiones del recipiente, así como también la velocidad, aunque no se encuentre explícita en la actividad. El objetivo de esta actividad es hacer que no queden dudas respecto al comportamiento de la gráfica en el llenado de recipientes según su geometría.

#### Intenciones didácticas

Esta actividad se presenta ante el grupo para que se resuelva de manera individual, igual que la anterior, pero en esta se debe realizar un análisis de la geometría del recipiente ya que ésta se puede dividir en tres partes y esto permitirá construir la gráfica que se pide tomando en cuenta que no se llenan al mismo tiempo pero que si alcanzan la misma altura. Para esto los alumnos tendrán cinco minutos para responder.

#### Consideraciones previas

Es necesario considerar que, con la realización de las actividades anteriores, los estudiantes tienen más elementos para esta actividad, como por ejemplo la noción de variación y el desarrollo del PyLV, por lo tanto, estarán familiarizados con los conceptos y será más fácil de su realización. También es necesario que antes de comenzar esta actividad, los estudiantes entreguen la anterior, ya que esto nos permitirá ver cuál es la forma en que los estudiantes se enfrentan ante situaciones de variación.

**Actividad 3.2** Dados los siguientes recipientes (Imagen 7) que se están llenando con el mismo gasto constante, dibujar las gráficas correspondientes en el mismo sistema coordenado.

#### Actividad 3.3

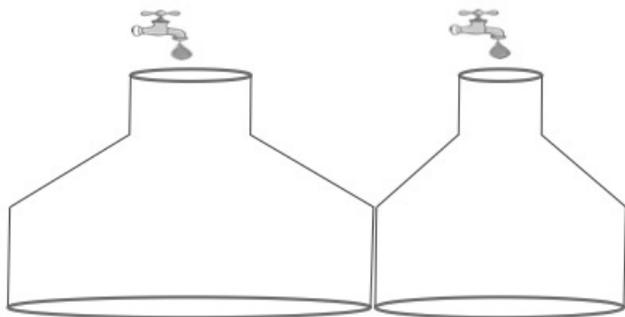


Imagen 7. Comparación de razones de cambio

### Conocimientos y habilidades

Se pretende que los estudiantes utilicen las ecuaciones obtenidas en la modelación, con la intención de que se haga visible el uso de las ecuaciones diferenciales en la hidráulica y particularmente en la ingeniería civil que es para lo que se está formando. La idea central de esta actividad es predecir el tiempo de llenado de un recipiente (cono truncado), para el cual los estudiantes necesitan realizar un proceso que implica un análisis que no se había realizado anteriormente, el cuantitativo.

#### Intenciones didácticas

Esta actividad se presenta ante el grupo para que se resuelva de manera individual, igual que la anterior, pero en esta el análisis es específicamente de un cono truncado con ciertas condiciones iniciales, las cuales serán de utilidad para que los estudiantes puedan predecir el tiempo total de llenado del recipiente. Para esto los alumnos tendrán quince minutos para responder.

#### Consideraciones previas

Es necesario considerar que los estudiantes no tienen dudas sobre la modelación del llenado de recipientes, ya que le aportara elementos para entender el propósito de la actividad. También es necesario que los estudiantes retomen ciertos conocimientos algorítmicos para la realización de esta actividad ya que se pide predecir el tiempo de llenado. Para la realización de esta actividad, es necesario que entreguen la anterior igual que en las actividades anteriores.

**Actividad 3.3** Dadas las condiciones iniciales del llenado de un cono truncado (Imagen 8) con gasto constante determine el tiempo total de llenado.

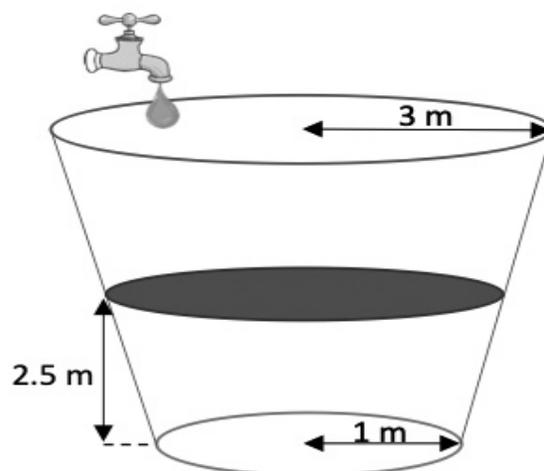


Imagen 8. Predicción de tiempo de llenado

### CONCLUSIONES

Para la formación de los estudiantes es muy importante el desarrollo de la noción de variación, así como también del PyLV, debido a los distintos fenómenos que se estudian en la licenciatura en Ingeniería Civil. Es importante mencionar que existen otros fenómenos relacionados en donde se pueden proponer situaciones de variación, sin embargo, consideramos que la hidráulica es el escenario ideal para el desarrollo de estas nociones, lo que nos lleva a la significación o resignificación de la noción de Razón de Cambio.

Identificamos que el medio adecuado para este tipo de fenómenos es la modelación y graficación, agregando a la simulación como una herramienta importante tomando en cuenta que se pueden reunir varios elementos en la construcción de la misma. Temas que abordamos de la manera más entendible posible retomando el trabajo de investigación de Caballero (2018).

Finalmente, el objetivo del diseño es mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los temas derivados del Cálculo considerando a la noción Razón de Cambio en un contexto propio de la Ingeniería Civil.

## REFERENCIAS

- Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 227-251.
- Caballero, M. A. (2018). Causalidad y Temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Tesis de doctorado no publicada. México: Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Manuel, H. (15 de Junio de 2018). YouTube. Obtenido de TUTORIAL DE VACIADO DE UN CILINDRO, CONO Y CONO TRUNCADO (GEOGEBRA): <https://www.youtube.com/watch?v=f7JWKnmskIY>