

MODELOS DE TORMENTAS E HIDROGRAMAS UNITARIOS A PARTIR DE LAS ECUACIONES DE WIENER-HOPF

MODELS OF STORMS AND UNIT HYDROGRAPHS THROUGH WIENER-HOPF EQUATIONS

Omar de la Cruz-Courtois¹, Delva Guichard-Romero²,
Miguel A. Aguilar-Suárez²

RESUMEN

El Modelo de Wiener-Hopf establece una relación entre precipitación y escurrimiento, el cual conduce a un hidrograma de escurrimiento directo que resulta de la lluvia efectiva unitaria uniforme sobre una cuenca dada, con respecto del tiempo. Cuando el tiempo tiende a infinito, la cuenca agotará su capacidad de almacenamiento, y el volumen de agua precipitado igualará al volumen de escurrimiento, estableciéndose un caudal constante a la salida de la cuenca. En este trabajo, se consideran las variaciones de intensidad de la tormenta, a través de la superposición de la función impulso y las ecuaciones probabilísticas de Wiener-Hopf. Se aplicó la Transformada de Laplace para la determinación del gasto de escurrimiento en función del tiempo y las alturas de precipitación del hietograma de una serie de tormentas. A partir de las Ecuaciones de Wiener-Hopf se obtuvieron los hidrogramas de escurrimientos directos unitarios, aplicados a la cuenca del río Cantón.

Palabras clave: Tormentas, Wiener-Hopf, Hidrograma.

ABSTRACT

The Wiener-Hopf Model establishes a relationship between precipitation and runoff, which leads to a direct runoff hydrograph that

results from the uniform unit effective rainfall over a given basin, with respect to time. When time tends to infinity, the basin will exhaust its storage capacity, and the volume of precipitated water will equal the volume of runoff, establishing a constant flow of water. In this work, the variations of intensity of the storm are considered, through the superposition of the impulse function and the probabilistic Wiener-Hopf equations. The Laplace transform was applied to determine the runoff output as a function of time and the heights of precipitation of the hietograph of a series of storms. From the Wiener-Hopf equations hydrographs of direct unit runoff were obtained and they were applied to Canton basin.

Keywords: Storms, Wiener-Hopf, Hydrograph.

INTRODUCCIÓN

El agua superficial continuamente interactúa con la atmósfera y el agua subterránea. Las leyes físicas que se presentan en el flujo superficial y los datos hidrológicos se analizan como datos de entrada para un respectivo modelado. La cuenca hidrológica es aquella que cuenta con una red de drenaje, formada por ríos y arroyos, en la cual, al llover, el agua es transportada por dicha red hacia un punto de salida. Supóngase que se tiene una cuenca específica y comienza la precipitación en forma constante, continua e indefinida. Esta precipitación varía las condiciones tanto de almacenamiento como de flujo en el cauce. Al inicio, la mayor parte de la proporción contribuye al almacenamiento superficial del cauce y dependiendo del tipo de suelo, se presenta una tasa de infiltración en éste. Además, el almacenamiento puede ser de dos tipos, uno de tipo rápido, el cual continua usualmente hasta el flujo del cauce, y uno de tipo lento que desaparece hasta el proceso de evaporación. Cuando estos tipos de almacenamiento se presentan ocurre que los flujos insaturados atraviesan

¹ Profesor de la Facultad de Ciencias Física y Matemáticas de la UNACH, Profesor de la Facultad de Ingeniería de la UNACH

² Profesor(a) de la Facultad de Ingeniería de la UNACH.

Email: omar.courtois@unach.mx, dguich@unach.mx, maas@unach.mx

los suelos insaturados sobre la superficie del terreno, y los flujos superficiales, subsuperficiales y subterráneos van variando a través del cauce. Al final, el cauce se comporta como un canal y se debe estudiar el flujo que circula a través de él (Aparicio, 1992).

El escurrimiento superficial es la parte de la precipitación que no se infiltra en la superficie del suelo. Si el suelo tiene cierta capacidad de infiltración, cuando la intensidad de la lluvia es menor a esta capacidad, la lluvia es totalmente infiltrada y no se presenta el escurrimiento superficial. De lo contrario, si la intensidad de la lluvia excede la capacidad de infiltración el escurrimiento se presenta en una proporción equivalente a la diferencia de la intensidad de lluvia y capacidad de infiltración. El flujo superficial se puede considerar como un flujo laminar cuya profundidad se incrementará de manera gradual hasta que se comporte como un canal; además, a lo largo del flujo se presentarán pequeños almacenamientos en la superficie que se acumularán a lo largo del cauce. Así, el suelo almacenará el agua infiltrada hasta saturarse, y con lo cual el flujo se volverá superficial durante el período que dure la precipitación (Ramos y Gracia, 2020).

Este modelo de escurrimiento se aplica a zonas urbanas y a zonas naturales con baja infiltración como terrenos semiáridos o con poca vegetación, y en muy raras ocasiones se presenta en regiones húmedas. En estos casos, la capacidad de infiltración del suelo excede la intensidad de la lluvia observada para la mayoría de los casos, exceptuando cuando se presentan tormentas o avenidas extremas. Es así como el flujo subsuperficial se convierte en un mecanismo importante para el transporte del agua que se origina en las tormentas. El proceso de flujo subsuperficial se puede describir de la siguiente manera. Al inicio de la lluvia, el flujo superficial se encuentra en equilibrio y se presenta el flujo subsuperficial en el suelo no saturado. Luego la infiltración se presenta, interactuando entonces el agua superficial con el agua subsuperficial. Cuando el suelo se satura el flujo subsuperficial provoca que el flujo superficial se vuelva constante durante el tiempo de la precipitación.

El flujo subsuperficial presenta velocidades que por lo general son muy bajas, con lo que no afecta significativamente la cantidad de agua que se presenta en el cauce, salvo en circunstancias especiales que dependen de la permeabilidad del suelo y la conductividad hidráulica del mismo. Además, cuando se al-

canza la saturación de un suelo se llega a presentar un flujo superficial saturado, a partir de lluvias que saturan los suelos y provocan los flujos superficiales. La velocidad del flujo subsuperficial es tan lenta que el cauce no siempre se ve afectado ya sea por infiltración o por ascensión durante una tormenta. Incluso se han delimitado áreas específicas de las cuencas que sí contribuyen de manera directa al flujo del cauce. Además, el área de la cuenca que afecta los cauces aumenta por lo general durante el proceso de precipitación y después disminuye significativamente.

La cantidad de agua almacenada en un sistema hidrológico S se puede expresar como la relación entre el flujo de entrada I y el flujo de salida Q a partir de la ecuación de continuidad

$$\frac{dS}{dt} = I - Q. \quad [1]$$

Supóngase que el agua se almacena en un sistema hidrológico, donde el nivel aumenta o disminuye de acuerdo con I y Q de la ecuación anterior con respecto al tiempo, así como las variaciones respectivas de I , dI/dt , $d^2I/dt^2, \dots, Q$, dQ/dt , $d^2Q/dt^2, \dots$, (Kisil, 2018). En este sentido, el almacenamiento S se puede expresar como la siguiente función

$$s = f\left(I, \frac{dI}{dt}, \frac{d^2I}{dt^2}, \dots, Q, \frac{dQ}{dt}, \frac{d^2Q}{dt^2}, \dots\right). \quad [2]$$

La función f se calcula de acuerdo con las condiciones físicas del sistema hidrológico. Tanto la ecuación de continuidad como la función de almacenamiento se deben resolver de manera simultánea, con lo cual la salida Q se puede calcular a partir de la entrada I , las cuales dependen del tiempo.

La respuesta de un sistema lineal se caracteriza únicamente por la función de respuesta de impulso. Si un sistema recibe una entrada de una cantidad unitaria aplicada instantáneamente en el tiempo τ , la respuesta del sistema en un tiempo posterior t se describe mediante una función de respuesta de impulso unitario $u(t-\tau)$, donde $t-\tau$ es el tiempo de retraso desde que el impulso fue aplicado. En el caso de almacenamientos, cuando estos se encuentran vacíos al inicio y luego se llenan con una cantidad unitaria de agua, la función de salida $Q(t)$ coincide con la función de respuesta de impulso. Las funciones de respuestas de impulsos siguen los principios de las

ecuaciones diferenciales, en el sentido de la linealidad, es decir, impulsos multiplicados por escalares, siguen siendo impulsos, y la combinación lineal de impulsos continúa siendo un impulso.

Si $I(\tau)$ denota la intensidad de lluvia en mm por hora y $d\tau$ es un intervalo de tiempo infinitesimal medido en horas, luego $I(\tau)d\tau$ es la profundidad en mm de la entrada de la lluvia al sistema durante ese intervalo. El escurrimiento directo $(t-\tau)$ -unidades que resulta después de esta entrada está dado por

$$I(\tau)u(t - \tau)d\tau. \quad [3]$$

La respuesta a la función de entrada de tiempo completa $I(\tau)$ se calcula integrando la respuesta con respecto a su impulso

$$Q(t) = \int_0^t I(\tau)(t - \tau)d\tau. \quad [4]$$

La ecuación anterior se llama integral de convolución y es la ecuación fundamental para la solución de un sistema lineal en un tiempo de escala continuo. Para la mayoría de las aplicaciones hidrológicas, las soluciones se plantean en intervalos de tiempo discreto, ya que generalmente la entrada está dada como una función discreta, como son los hietogramas. Es por ello que se deben plantear nuevas herramientas para el manejo de la integral anterior.

METODOLOGÍA Y RESULTADOS

Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función del tiempo t tal que $f(t)=0$ para $t<0$, s una variable compleja, L un símbolo operativo que indica que la cantidad a la que antecede se va a transformar mediante la integral de Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt. \quad [5]$$

La transformada de Laplace de $f(t)$, denotada por $F(t)$ se define como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt[f(t)] \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \end{aligned} \quad [6]$$

El proceso inverso de encontrar la función del tiempo $f(t)$ a partir de la transformada de Laplace $F(s)$ se denomina transformada inversa de Laplace. La notación para la transformada inversa de Laplace es L^{-1} . La expresión para esto es

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad \text{para } t > 0 \quad [7]$$

en donde c la abscisa de convergencia es una constante real y se elige más grande que las partes reales para todos los puntos singulares de $F(s)$. Por tanto, la trayectoria de integración es paralela al eje j y se desplaza una cantidad c a partir de él. Esta trayectoria de integración va hacia la derecha de todos los puntos singulares.

Además, se obtuvo la transformada de Laplace de la función desplazada en el tiempo

$$f(t - a)1(t - a) \quad [8]$$

en donde $a \geq 0$. Esta función se anula cuando $T < a$. Las funciones $F(t)1(t)$ y $f(t-a)1(t-a)$ se representan en la Figura 1.

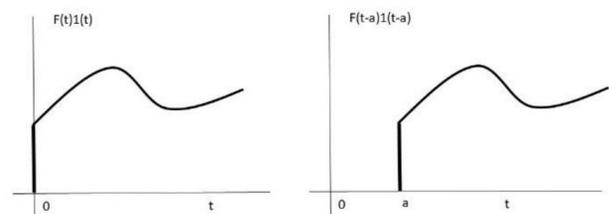


Figura 1.- Función $f(t)1(t)$ y $f(t - a)1(t - a)$

La transformada de Laplace de $f(t-a)1(t-a)$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - a)1(t - a)] &= \\ \int_0^{\infty} f(t - a)1(t - a) e^{-st} dt. \end{aligned} \quad [9]$$

Integral de convolución para sistemas hidrológicos

Para un sistema lineal e invariante con el tiempo, se calculó la función de transferencia $G(s)$ como

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad [10]$$

en donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada y $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la salida, suponiendo todas las condiciones iniciales involucradas igual a cero. La ecuación anterior se resolvió y se obtuvo una integral de convolución y se planteó para un sistema hidrológico (Wang y Xue, 2018).

Ecuaciones de Wiener-Hopf
Sean

Q_i , gasto observado

Q_i^* , gasto calculado

h_i , altura de precipitación

f_i , precipitación observada

El error cuadrático de la diferencia entre el gasto observado y el gasto calculado es

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \left[Q_i - \sum_{k=1}^{\infty} h_k f_{i-k+1} \right]^2 \quad [11]$$

Ya que al minimizar el valor de ϵ se requiere que

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial h_j} = 0 \quad j = 1, 2, \quad [12]$$

se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i f_{i-j+1} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i-j+1} \sum_{k=1}^{\infty} h_k f_{i-k+1} \quad [13]$$

Para $j \geq 1$. Haciendo $i-j+1=k$

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i f_{i-j+1} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{k+j-1} f_k \quad [14]$$

Sea $i - j + 1 = v$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k Q_{k+j-1} = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \sum_{v=1}^{\infty} f_v f_{v+j-k} \quad [15]$$

Ahora, se definen la función discreta de autocorrelación de las alturas de lluvia-escurrecimiento en el tiempo

$$\Phi_{ff}(j) = \sum_{v=1}^{\infty} f_v f_{v+j} \quad [16]$$

para valores enteros de j y la función de correlación cruzada de lluvias-escurrecimientos

$$\Phi_{fg}(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k Q_{k+\sigma} \quad [17]$$

para valores enteros de σ . De la parte anterior y realizando las sustituciones adecuadas se llega a

$$\Phi_{fg}(j-1) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \Phi_{ff}(j-k), \quad [18]$$

la cual se conoce como Ecuación de Wiener-Hopf y representa un sistema de ecuaciones cuya solución minimiza al error cuadrático total. Para su aplicación, se considera el caso finito, de modo que resulta un sistema de ecuaciones de n ecuaciones con n incógnitas, donde n se hace igual al número de ordenadas que tenga el hidrograma más el número de ordenadas del hietograma menos uno.

Separación del gasto directo del gasto base

Se trazaron los hidrogramas de cada tormenta con sus correspondientes separaciones de escurrimiento. Para separar los escurrimientos en cada hidrograma, se trazó una línea horizontal desde el punto en que subía el hidrograma hasta el punto localizado debajo del pico. Después, sobre la rama descendente se localizó un punto N días a la derecha del punto debajo del pico, donde

$$N = 0.827A^{0.2} \quad [19]$$

donde A es el área de la cuenca en km^2 . Finalmente, el punto así obtenido y el punto debajo de pico se unieron con una línea recta (Aparicio, 1998).

Hietogramas

A partir de las estaciones climatológicas seleccio-

nadas dentro de la subcuenca, se calcularon los hietogramas medios de la siguiente manera. Para cada tormenta, se obtuvo un plano de isoyetas calculado de la forma usual. Después se obtuvo una tabla en la cual se mostraban los valores de la precipitación acumulada en forma creciente para intervalos de 6 horas. Superponiendo el plano de isoyetas sobre el plano de la cuenca, se obtuvieron los porcentajes de áreas entre isoyetas. Para cada intervalo de tiempo se

obtuvo una precipitación media acumulada multiplicando las precipitaciones acumuladas por los porcentajes de área y sumando estos productos. Las barras del hietograma se obtuvieron de la diferencia de las precipitaciones medias acumuladas consecutivas correspondientes.

Hidrograma de escurrimiento directo

Se calculó para cada tormenta el valor del coeficiente de infiltración de acuerdo con Aparicio (1992). Con este coeficiente se obtuvieron las alturas de precipitación efectiva que, junto con el correspondiente hidrograma de escurrimiento directo (HED), constituyen las entradas al modelo. Se calculó el hidrograma unitario instantáneo ajustando una curva promedio, y volviendo a ajustar las unidades para que el volumen fuese unitario. Con este hidrograma unitario instantáneo y con las alturas de precipitación efectiva para cada tormenta, se obtuvieron hidrogramas de escurrimiento directo que se compararon con los correspondientes hidrogramas de escurrimiento directo obtenidos previamente de los hidrogramas originales.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

El presente trabajo se aplicó a la subcuenca Cantón perteneciente a la cuenca del Papaloapan, ubicada en la zona vertiente del Golfo de México. Descarga sus aguas en la Laguna de Alvarado (localizada en la ribera del Golfo) y tiene una superficie de 46 517 km². El sistema fluvial del Papaloapan es el segundo en importancia en el país y los principales ríos que la componen son:

a) Río Blanco. Nace en la Sierra de Zongolica y en las faldas del Pico de Orizaba y desemboca directamente en la Laguna de Alvarado.

b) Río Tonto. Nace en las estribaciones de la Sierra Mazateca; es el afluente más importante de la margen izquierda del Río Papaloapan y se caracteriza por acarrear muy pocos azolves debido a que su subcuenca está cubierta de vegetación.

c) Río Salado. Drena al Valle Poblano-Oaxaqueño y a la Alta Mixteca; tiene la subcuenca más árida y deforestada del sistema, por lo que este río conduce una gran cantidad de azolves.

d) Río Grande. Drena la Sierra de Juárez y las estribaciones de la Sierra de Oaxaca; se une al Río Salado en Quiotepec para formar el Río Santo Domingo, el cual después de recibir las aportaciones del Río Tonto por su izquierda y de los Ríos Usila y Valle Nacional por su derecha, se convierte en el Río Papaloapan (Pineda, 2017).

En las partes bajas, cerca de la Laguna de Alvarado, el Papaloapan recibe las aportaciones de los Ríos Tesechoacán y San Juan Evangelista por su margen derecha, los cuales bajan de las estribaciones del nudo del Zempoaltépetl. Para los diferentes estudios que se han hecho, la cuenca del Papaloapan se ha dividido en subcuencas, siendo una de las principales la subcuenca de Cantón, que comprende un área de 14 037.7 km² del total. En la población de Cantón se encuentra una estación hidrometeorológica, de la cual se obtienen datos para el estudio de la cuenca. Se tomaron para el estudio, un total de 8 estaciones climatológicas: 20174, 20175, 20114, 20014, 20042, 20294, 20189 y 30131. En la Figura 2 se observa la ubicación del Papaloapan y Cantón, y en la Figura 3 se observa la ubicación de las estaciones hidrométricas.

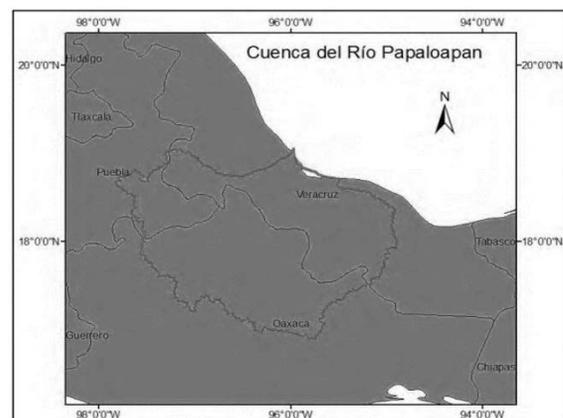


Figura 2.- Ubicación de la subcuenca Cantón (Pineda, 2017)

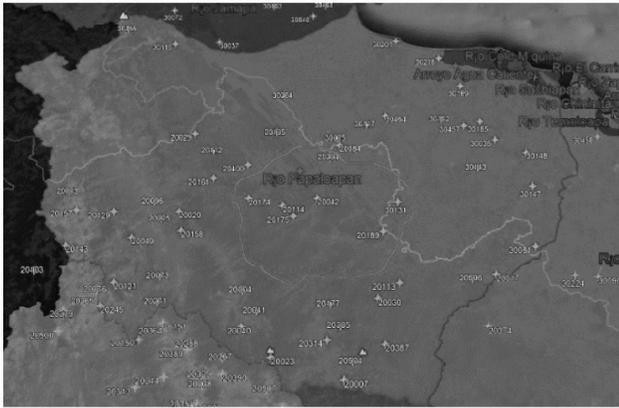


Figura 3.- Ubicación de las estaciones climatológicas de la subcuenca Cantón (Google Earth, 2021)

Para resolver la transformada de Laplace de una función desplazada en el tiempo se supuso que $f(t)=0$ para $t<0$, además, se realizó la sustitución de t por τ , donde $\tau=t-a$, con lo que

$$\int_0^{\infty} f(t-a)1(t-a) e^{-st} dt = \int_{-a}^{\infty} f(\tau)1(\tau) e^{-s(\tau+a)} d\tau. \quad [20]$$

Ya que $f(\tau)1(\tau)=0$ para $\tau<0$, se puede cambiar el límite inferior de la integración de $-a$ a 0. Así

$$\int_{-a}^{\infty} f(\tau)1(\tau) e^{-s(\tau+a)} d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau) e^{-s(\tau+a)} d\tau \quad [21]$$

$$\int_{-a}^{\infty} f(\tau)1(\tau) e^{-s(\tau+a)} d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} e^{-as} d\tau \quad [22]$$

$$\int_{-a}^{\infty} f(\tau)1(\tau) e^{-s(\tau+a)} d\tau = e^{-as} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-as} F(s) \quad [23]$$

en donde

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad [24]$$

Y en este caso

$$\mathcal{L}[f(t-a)1(t-a)] = e^{-as} F(s), \quad a \geq 0. \quad [25]$$

En esta última ecuación se plantea que el desplazamiento en el tiempo de la función de tiempo $f(t)1(t)$ mediante a (en donde $a \geq 0$) corresponde a la multiplicación de la transformada $F(s)$ por e^{-as} .

Integral de convolución

Considérese la transformada de Laplace de

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau. \quad [26]$$

Con frecuencia, esta integral se escribe como

$$f_1(t) * f_2(t). \quad [27]$$

La operación matemática $f_1(t)*f_2(t)$ se denomina convolución. Se observa que si se considera $t-\tau=\xi$, entonces

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = - \int_t^0 f_1(\xi) f_2(t-\xi) d\xi = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau. \quad [28]$$

Por tanto

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau. \quad [29]$$

Para un sistema lineal e invariante con el tiempo, la función de transferencia $G(s)$ es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad [30]$$

en donde $X(s)$ es la transformada de Laplace de la entrada y $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la salida, suponiendo todas las condiciones iniciales involucradas igual a cero. De aquí se obtiene que la salida $Y(s)$ se puede escribir como

$$Y(s) = G(s)X(s). \quad [31]$$

Se observa que la multiplicación en el dominio

complejo es equivalente a la convolución en el dominio del tiempo, por lo que la transformada inversa de Laplace de la ecuación anterior se obtiene mediante la integral de convolución

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad [32]$$

donde $g(t) = 0$ y $x(t) = 0$ para $t < 0$.

Para la aplicación de las Ecuaciones de Wiener-Hopf se escogieron las tormentas que se muestran en la Tabla 1, de los registros existentes con base en la importancia que tuvieron. El sistema dinámico modela entradas y salidas; en el presente trabajo, las entradas son los caudales de escurrimiento y las alturas de precipitación efectiva, y las salidas son las alturas del Hidrograma Unitario Instantáneo (HUI).

Tabla 1.- Tormentas consideradas

Tormenta	Período
1	1-31 de octubre, 2017
2	28-30 de junio, 2018
3	1-5 de julio, 2018
4	29-agosto al 3-septiembre de 2018
5	6-12 de septiembre de 2018

En la Figura 4. se observan los hidrogramas de las tormentas elegidas.

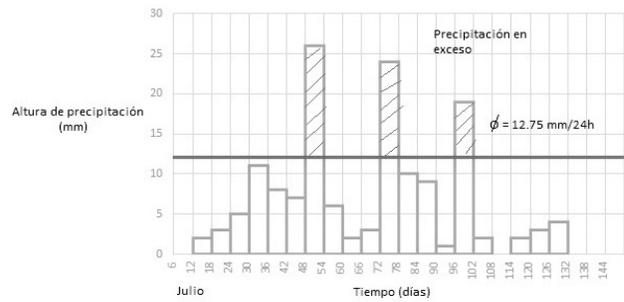
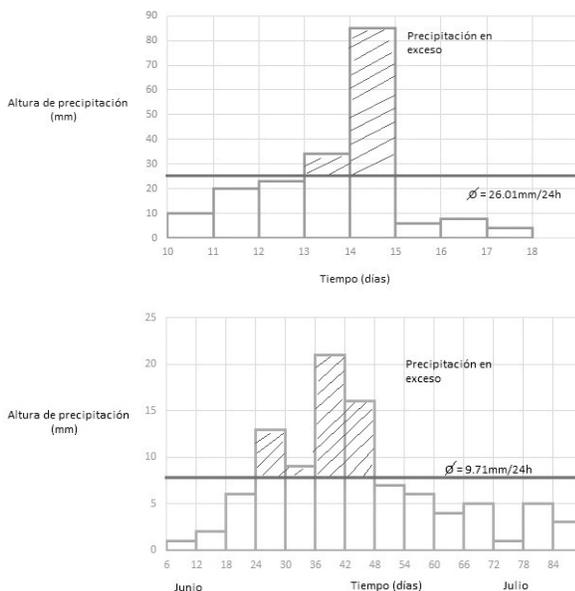


Figura 4. Hidrogramas de las tormentas seleccionadas (Elaboración propia)

A partir de las estaciones climatológicas se calcularon los hietogramas y con el método de las isoyetas descrito en la metodología se calcularon los hietogramas medios, que se observan en la Figura 4. El cálculo detallado se puede consultar en las referencias de la SCT (2020).

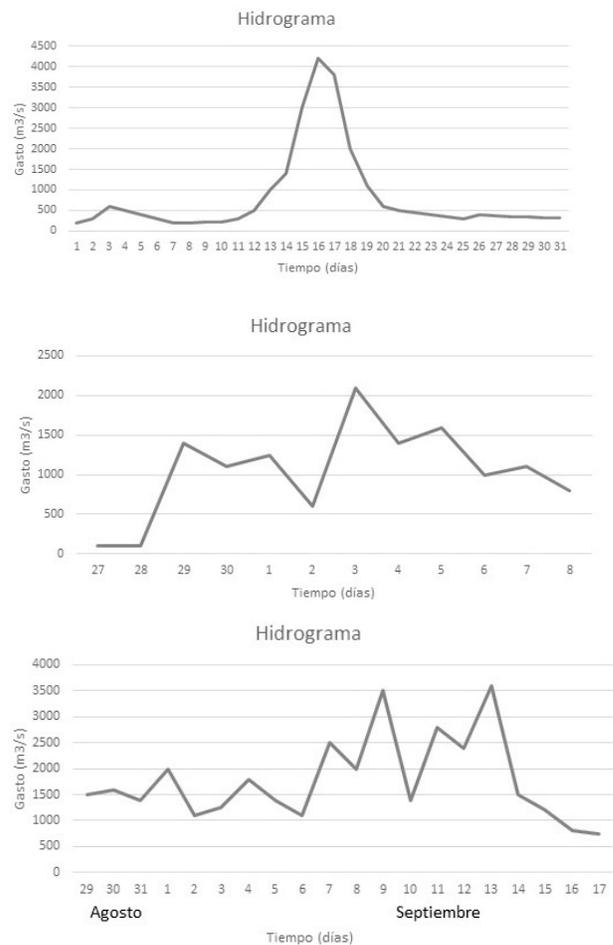


Figura 5. Hietogramas de las tormentas seleccionadas (Elaboración propia)

El conjunto de datos de precipitaciones se tomó de la Base de Datos Clicom, cuyo sitio web se puede consultar en las referencias. Este se puede ver en la Figura 6.

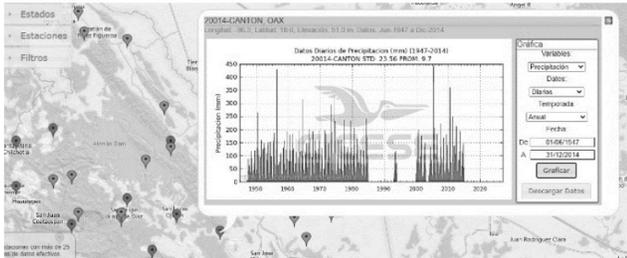


Figura 6. Registro de precipitación de la Cuenca Cantón (Fuente: <http://clicom-mex.cicese.mx/mapa.html>)

A partir del hidrograma se calculan los vectores de gasto Q_i y precipitación f_i .

$$Q_1 = (200,300,600, \dots, 330,320) \quad [33]$$

$$Q_2 = (100,100,1400, \dots, 1100,800) \quad [34]$$

$$Q_3 = (1500,1600, \dots, 800,750) \quad [35]$$

$$f_1 = (10,20,23, \dots, 4,0) \quad [36]$$

$$f_2 = (1,2,6, \dots, 5,3) \quad [37]$$

$$f_3 = (0,0,3, \dots, 0,0) \quad [38]$$

Planteando la Ecuación de Wiener-Hopf

$$\sum_{k=1}^6 h_f \Phi_{ff}(j-k) = \Phi_{fg}(j-1) \quad [39]$$

de donde

$$\begin{aligned} \Phi_{fg}(j-1) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k Q_{k+j-1} \\ \Phi_{fg}(j-1) &= f_1 Q_{1+j-1} + f_2 Q_{2+j-1} + \dots \\ \Phi_{fg}(j-1) &= f_i Q_j + f_2 Q_{j+1} + \dots \\ &\quad + f_8 Q_{j+7} \quad [40] \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación 40, se obtienen las alturas del Hidrograma Unitario Instantáneo a partir de las Ecuaciones de Wiener-Hopf. En la Figura 7 se observan los caudales a partir de las tormentas o hietogramas de la Figura 4 con el método de Wiener-Hopf y el HUI también se calculó con el mismo método.

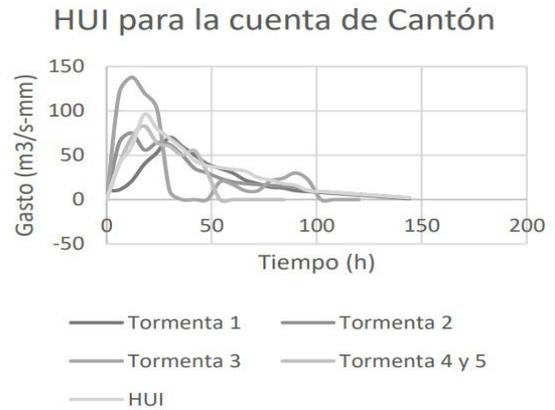


Figura 7.- Hidrogramas Unitario Instantáneo para las 5 tormentas

Las Figura 8a y 8b muestran la comparación entre el Hidrograma de Ecurrimiento Directo y el Hidrograma de Ecurrimiento que se obtiene mediante el Hidrograma Unitario Instantáneo, donde HED observado, es el hidrograma real de la estación hidrométrica y HED obtenido por HUI, es el hidrograma que resulta del Método de las Ecuaciones de Wiener-Hopf.

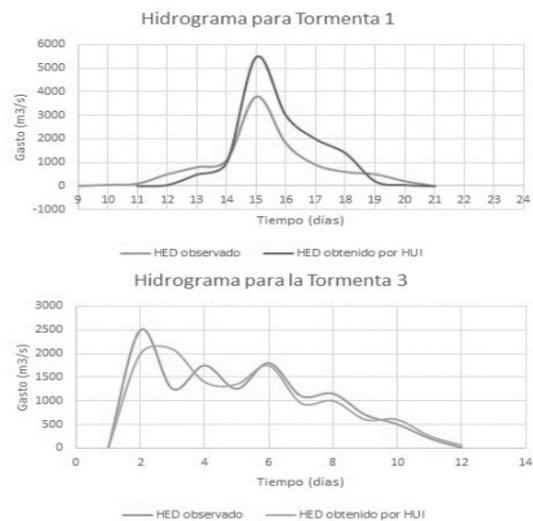


Figura 8a.- Comparación entre el HED observado y obtenido por el HUI

REFERENCIAS

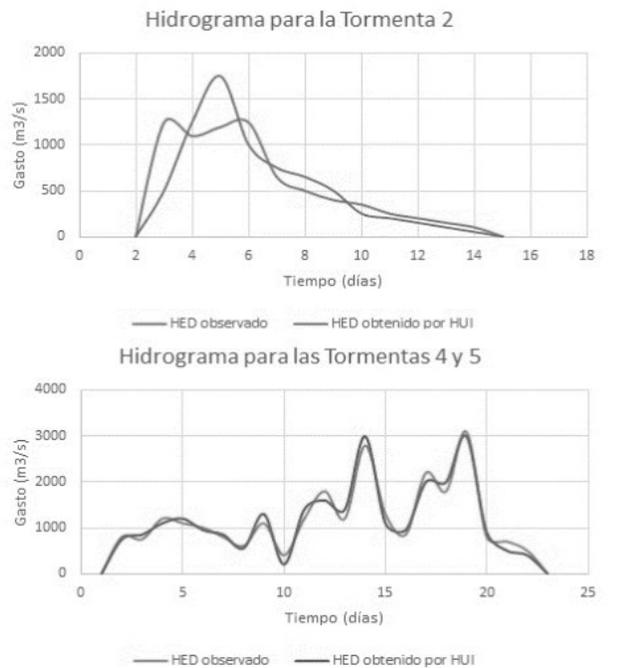


Figura 8b.- Comparación entre el HED observado y obtenido por el HUI (continuación)

CONCLUSIONES

Los modelos lluvia-escurremientos a partir de las ecuaciones de Wiener-Hopf dan la pauta para poder calcular los hidrogramas de escurrimiento directo. Es importante separar los hidrogramas de acuerdo con las fechas de las tormentas, así como dividir la cuenca por regiones de acuerdo con el valor de la precipitación efectiva de cada región. En este sentido, se recomienda fragmentar tanto como sea posible las tormentas estudiadas de un mismo evento, así como calcular la precipitación efectiva por zonas. Una ventaja de utilizar las ecuaciones de Wiener-Hopf es la sensibilidad de las entradas del modelo, ya que el sistema de ecuaciones es estable, y converge a una solución aun cuando las entradas fluctúen en cierto rango.

- Aparicio M., F. J. (1992). Fundamentos de hidrología de superficie. Limusa, México.
- Base de datos de precipitaciones (2020). <http://clicom-mex.cicese.mx/mapa.html>
- CONAGUA, (2020). <https://smn.conagua.gob.mx/es/climatologia/informacion-climatologica/informacionestadistica-climatologica>.
- Juárez, R. (1970). Modelo del hidrograma unitario instantáneo. Tesis UNAM. México.
- Kisil, A. V., (2018). "An iterative Wiener-Hopf Method for triangular matrix functions with exponential factors". *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 78(1), pag. 45-62.
- Pineda G., D. (2017). Geomorfología de sistemas fluviales. Evolución y desarrollo del río Papaloapan. Tesis de Licenciatura. UNAM, 2017.
- Ramos, J., Gracias, J., (2020). "Reconocimiento de patrones espaciales para entender desastres naturales: inundaciones". *Gaceta del Instituto de Ingeniería de la UNAM*, 414(1).
- SCT, (2020). Isoyetas de intensidad de lluvias. [http://www.sct.gob.mx/fileadmin/Direcciones Grales/DGST/Isoyetas/veracruz.pdf](http://www.sct.gob.mx/fileadmin/Direcciones%20Grales/DGST/Isoyetas/veracruz.pdf)
- Wang, L., Xue, L., (2018). "A Laplacetransform boundary element model for pumping tests in irregularly shaped doubleporosity aquifers." *Journal of Hydrology*, 567, 712-720.